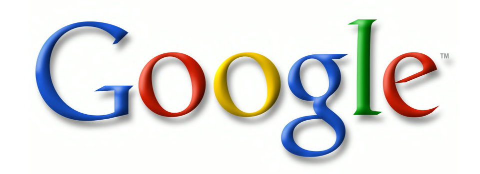
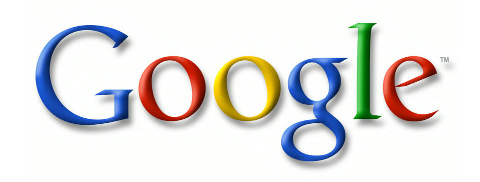



Google

GUSTAVE ROBIN,
CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

ŒUVRES SCIENTIFIQUES

RÉUNIES ET PUBLIÉES
SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

Par Louis RAFFY,
CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1889



GUSTAVE ROBIN.

ŒUVRES SCIENTIFIQUES.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

26127. PARIS. — GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

GUSTAVE ROBIN,
CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

ŒUVRES SCIENTIFIQUES

RÉUNIES ET PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

Par Louis RAFFY,
CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

AVERTISSEMENT.

Les *Œuvres scientifiques* de Gustave Robin forment trois Volumes.

MATHÉMATIQUES : un Volume. *Nouvelle théorie des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre.*

PHYSIQUE : un Volume en deux fascicules.

1° *Physique mathématique* (Distribution de l'électricité, Hydrodynamique, Fragments divers).

2° *Thermodynamique générale* (Équilibres et modifications de la matière).

CHIMIE : un Volume. *Leçons de Chimie physique*, professées à la Faculté des Sciences de Paris.

Le présent fascicule, formé en majeure partie de recherches inédites, renferme, à quelques pages près, tout ce que Robin a publié.

Il s'ouvre par un Mémoire *Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts* (Thèse pour le doctorat ès sciences mathématiques, soutenue en Sorbonne, le 13 juillet 1886). Ce travail, qui était divisé en deux Parties, a paru dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* (année 1886,

Supplément). Nous y avons ajouté une troisième Partie, composée d'articles tous inédits, sauf le premier, et qui ont été élaborés, soit en même temps que la Thèse, soit dans le courant de l'année scolaire 1886-1887.

Ensuite viennent des travaux d'Hydrodynamique, que nous avons groupés en deux Mémoires. Le premier, intitulé *Le problème général de l'Hydrodynamique*, est la réunion de deux Notes que Robin avait rédigées en 1887, mais qu'il n'a point publiées. De la même époque date le Mémoire suivant (*Percussions et explosions dans les liquides*), résumé en juillet 1887 dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et qui a été reconstitué d'après les manuscrits laissés par l'auteur.

Enfin, sous le titre *Fragments divers*, on trouvera quelques articles relatifs à l'Électricité et à l'Électromagnétisme, composés avant la fin de l'année 1889, mais qui étaient restés inédits.

ÉLECTRICITÉ STATIQUE.



SUR LA

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

A LA SURFACE

DES CONDUCTEURS FERMÉS ET DES CONDUCTEURS OUVERTS (1).

INTRODUCTION.

Dans son premier Mémoire sur la distribution de l'électricité (2), Poisson a posé, mais non résolu, le problème de l'équilibre électrique d'un sphéroïde conducteur. En écrivant que le potentiel est constant en tout point intérieur au sphéroïde, il arrive à une condition que l'on peut énoncer ainsi : si l'on divise la densité électrique en un point par la puissance $n-1$ du rayon vecteur et qu'on développe le quotient en une série de fonctions de Laplace, la fonction d'ordre n doit manquer dans le développement. Cette condition détermine complètement la densité inconnue; mais son expression explicite paraît présenter des obstacles qui ont fait reculer Poisson. « Il serait difficile, dit-il, de donner une solution générale de cette question », et il se restreint au cas des sphéroïdes infiniment peu différents de la sphère, c'est-à-dire à des surfaces ayant en tous leurs points une excentricité dont le carré est négligeable. Il trouve alors pour la densité une série de fonctions sphériques, qui se déduit par une loi très simple de la série de même nature qui représente le rayon vecteur.

J'ai repris dans ce travail la question de la distribution électrique sur un sphéroïde sensiblement différent de la sphère; mais j'ai

(1) Thèse de Doctorat, publiée dans les *Annales de l'École Normale*; 1886.

(2) *Mémoires de l'Institut* pour 1811.

abordé le problème par une voie qui me semble nouvelle. Au fond, la méthode de Poisson revient, comme presque toutes les méthodes usitées dans la solution des questions d'équilibre électrique, à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles, à *trois* variables indépendantes, $\Delta V = 0$. Celle que j'ai adoptée consiste dans l'intégration d'une équation fonctionnelle à *deux* variables indépendantes seulement. Cette équation fonctionnelle convient à tous les conducteurs fermés; elle ne régit pas la classe infiniment plus étendue des conducteurs ouverts; mais elle semble jouer dans certaines questions d'Électrostatique un rôle d'autant plus efficace que sa portée est plus limitée : c'est là une loi de compensation d'une application fréquente en Mathématiques.

Dans la solution du problème qui nous occupe, j'ai tenu compte de l'influence, négligée par Poisson, de masses électriques fixes. Ce point est capital; car trouver l'équilibre électrique d'un conducteur soustrait à toute influence, c'est traiter un problème d'Électrostatique très incomplet et parfois relativement très facile. On en peut juger par le cas bien connu de l'ellipsoïde. J'ai tenu à résoudre la question des sphéroïdes de forme quelconque pour donner une idée de l'énorme complication du problème général de la distribution électrique. Cette complication, quoique grande encore, se dissimule dans les solutions élégantes données pour des corps à forme simple, tels que l'ellipsoïde, le tore, les deux sphères, les sphères sécantes, la calotte sphérique, le lemniscatoïde de révolution [1]. On verra que la densité électrique sur un sphéroïde se présente sous la forme d'une série d'intégrales définies dont chacune, pour être évaluée, exige que l'on sache calculer la précédente; il est vrai qu'à défaut d'une évaluation exacte, ces intégrales donnent prise successivement aux méthodes d'approximation indéfinie des quadratures mécaniques.

Mais, lors même qu'on saurait trouver la distribution de l'électricité sur tous les conducteurs fermés imaginables, on n'aurait fait que le premier pas dans la solution du problème général de l'Électrostatique. L'électricité en équilibre réside tout entière à la surface des corps conducteurs; on peut donc supposer ces corps vidés, pour ainsi dire, de leur substance intérieure et réduits à

(1) *Voir* le tome II des *Fonctions sphériques* de Heine.

leur seule surface terminale. A ce point de vue, les conducteurs fermés, tels que la sphère, deviennent des cas infiniment particuliers des conducteurs ouverts, tels que la calotte sphérique. Une théorie générale de ces derniers ne semble pas avoir été donnée. Le cas n'est plus le même que celui des conducteurs fermés. On ne peut pas identifier immédiatement le problème de la distribution électrique sur une surface ouverte avec le problème de Gauss : « Distribuer sur cette surface une couche dont le potentiel prenne en tous ses points une valeur donnée », parce que, cette couche étant trouvée, il faut la répartir entre les deux faces; mais le départ se fait aisément : une fois le problème de Gauss résolu, on verra qu'une quadrature suffit pour achever la solution.

Une réduction considérable peut être effectuée dans le problème de la distribution de l'électricité sur les deux faces d'un conducteur ouvert : il est possible de ramener l'équilibre électrique de tous les conducteurs à contour multiple à celui des conducteurs à contour simple. Ainsi, que l'on imagine une sphère divisée en trois parties, une zone ou bande B et deux calottes C, C'. Si l'on connaît l'influence d'un point quelconque de la calotte C sur la calotte complémentaire $B + C'$, et celle d'un point quelconque de C' sur $B + C$, on en pourra conclure la loi de la distribution électrique sur la zone B. La méthode qui m'a permis d'opérer cette réduction offre de l'analogie avec celle que Murphy a imaginée pour résoudre le problème de l'influence mutuelle des conducteurs. Mais cette idée des influences successives, qui se présente naturellement lorsqu'il s'agit de corps séparés, semble au premier abord inapplicable lorsqu'il s'agit de surfaces empiétant l'une sur l'autre, et l'on verra que, pour en tirer parti, j'ai dû la combiner avec d'autres idées assez complexes. L'inconvénient de cette méthode si générale réside dans les difficultés d'application. C'est cependant grâce à elle que j'ai réussi à calculer la distribution de l'électricité sur une zone sphérique conductrice, en prenant pour point de départ la solution si simple et si belle donnée par Sir W. Thomson pour l'équilibre électrique de la calotte sphérique.

Je passe ici sous silence divers résultats plus ou moins dignes d'intérêt que l'on trouvera dans le cours de ce travail; je me borne à faire observer que les méthodes dont j'ai fait usage

peuvent trouver leur application dans plus d'une branche de la Physique mathématique, en vertu de l'analogie ou de l'identité des équations aux dérivées partielles du second ordre qui régissent les divers ordres de phénomènes naturels. C'est ainsi que, dans ces dernières années, on a pu calculer les attractions apparentes de corps solides plongés dans un liquide par l'application pure et simple du principe de Murphy, transporté directement de l'Électrostatique à l'Hydrodynamique.

PREMIÈRE PARTIE.

LES CONDUCTEURS FERMÉS.

CHAPITRE I.

ÉQUATION FONCTIONNELLE CARACTÉRISTIQUE DES CONDUCTEURS FERMÉS.

Le problème le plus général de l'Électrostatique consiste à se donner des conducteurs et des masses électriques fixes, dont le nombre, la forme et la situation sont quelconques, et à chercher la distribution de l'électricité en équilibre sur les divers conducteurs pour des valeurs connues des potentiels ou des charges de chacun d'eux.

Le principe de Murphy ramène ce problème si compliqué à celui de l'influence de masses fixes sur un *seul* conducteur. C'est dans ce cas plus simple que nous nous placerons dans tout ce qui va suivre.

On sait que le problème de la distribution électrique sur un conducteur quelconque se ramène à celui-ci, posé par Green et par Gauss : Trouver une fonction V des trois coordonnées, con-

tinue dans tout l'espace, dont les dérivées premières ne deviennent discontinues qu'à la surface du conducteur, qui satisfasse en tout point de l'espace à l'équation $\Delta V = 0$, qui prenne à la surface une valeur connue en chaque point, et qui à l'infini soit du même ordre de petitesse que l'inverse de la distance à l'origine.

Quand il s'agit d'un conducteur fermé, on peut substituer à l'équation différentielle $\Delta V = 0$ une équation fonctionnelle à deux variables indépendantes, plus avantageuse dans certains cas.

I. — Établissement de l'équation fonctionnelle.

Considérons un point M de la surface σ du conducteur où la densité électrique a pour valeur e. Ce point subit les actions des divers éléments électriques $e' d\sigma'$ du reste de la surface σ et des charges $q_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ des points électrisés extérieurs, que nous supposons au nombre de p. Le potentiel au point M a pour valeur

$$V = \int_\sigma \frac{e' \, d\sigma'}{r} + \mathop{\mathrm{S}}_1^p \frac{q_i}{r_i},$$

r et r_i désignant les distances au point M de l'élément $d\sigma'$ et du point de charge q_i. Si l'on prend la dérivée de V suivant la normale intérieure n, on sait que la valeur de la fonction $\frac{\partial V}{\partial n}$ en un point de la surface est la moyenne arithmétique des valeurs, 0 et $4\pi e$, de cette même fonction en deux points, l'un intérieur, l'autre extérieur, infiniment voisins du premier : c'est donc $2\pi e$; et, comme

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = \frac{\cos(r, n)}{r^2},$$

on aura

$$e = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{e' \cos(r, n)}{r^2} \, d\sigma' + \frac{1}{2\pi} \mathop{\mathrm{S}}_1^p \frac{q_i \cos(r_i, n)}{r_i^2}. \tag{1}$$

Telle est l'équation fonctionnelle que nous avions en vue d'obtenir. Comme le potentiel n'y figure pas, il est bon d'en donner une démonstration directe.

Coupons la surface σ par un plan infiniment voisin du plan tangent en M. Ce plan partage le conducteur en deux calottes s et S, la première infiniment petite. L'aire de la section s_1 diffère infiniment peu de s. D'un point quelconque de s, on voit s_1 sous un angle solide infiniment voisin de 2π, si la surface ne présente aux environs du point M aucune singularité. Donc, la densité étant continue, la calotte s exercera sur s_1 une répulsion dont la composante normale, d'après un théorème de Gauss, est sensiblement égale à $2\pi es$.

Soit F la composante normale de la répulsion exercée sur s_1 par la calotte S et par les points électrisés extérieurs. La condition d'équilibre est

$$F = 2\pi es;$$

et, comme on a visiblement

$$\lim \frac{F}{s} = \int_\sigma \frac{e' \cos(r, n)}{r^2} d\sigma' + \mathop{\mathrm{S}}_1^p \frac{q_i \cos(r_i, n)}{r_i^2},$$

on en conclut l'équation (1). Cette équation fonctionnelle détermine l'inconnue e; les deux variables indépendantes sont les deux angles dont la relation avec le rayon vecteur définit la surface du conducteur. Elle a toujours une solution et une seule; car elle exprime, comme il est facile de s'en assurer, que, sur une surface intérieure à σ et infiniment voisine, la composante normale de la répulsion est nulle en chaque point $\left(\frac{\partial V}{\partial n} = 0\right)$.

Avant d'utiliser la formule (1) pour la solution du problème des sphéroïdes conducteurs, nous allons en faire quelques applications très simples, qui en feront ressortir les avantages [1].

---

[1] Voici une application de l'équation fonctionnelle (1) à l'équilibre électrique de l'ellipsoïde, qui permet de retrouver analytiquement le résultat obtenu par le procédé synthétique des ellipsoïdes homothétiques. Soit, en effet,

$$d\omega = \frac{\cos(r, n')}{r^2} d\sigma'$$

l'angle solide sous lequel, de l'élément de surface $d\sigma$, on voit l'élément $d\sigma'$ dont la normale intérieure est n'. Au cas où il n'existe pas de masses inductrices, l'é-

II. — Influence d'un point électrisé sur une sphère conductrice.

En appelant R le rayon de la sphère, V son potentiel constant, q_1 la charge du point, d_1 sa distance au centre de la sphère, on a visiblement

$$\frac{\cos(r,n)}{r} = \frac{1}{2R}, \qquad d_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos(r_1, n),$$

$$V = \int_\sigma \frac{e'\,d\sigma'}{r} + \frac{q_1}{r_1}.$$

Si dans l'équation (1) on porte les valeurs des cosinus tirées des deux premières relations et qu'on tienne compte de la troisième, on obtient

$$(2) \qquad e = \frac{V}{4\pi R} - \frac{q_1}{4\pi R}\,\frac{d_1^2 - R^2}{r_1^3}.$$

On retrouve ainsi, par la voie la plus directe, le résultat que Sir W. Thomson a obtenu par des procédés détournés si ingénieux.

III. — Sur un corps d'épreuve.

Un corps d'épreuve est, comme on sait, un conducteur de très petite dimension qu'on met en contact avec un autre conducteur de dimension finie. La charge prise par le corps d'épreuve ne dé-

---

quation fonctionnelle en question pourra s'écrire

$$(1') \qquad \int \frac{e'}{e}\,\frac{\cos(r,n)}{\cos(r,n')}\,d\omega = 2\pi.$$

Pour un ellipsoïde, on a

$$\frac{\cos(r,n)}{\cos(r,n')} = \frac{p}{p'},$$

p et p' étant les distances du centre aux plans tangents à $d\sigma$ et à $d\sigma'$; on le voit tout de suite en remarquant que la parallèle à r, menée par le centre, est divisée par ce point et les deux plans tangents en deux parties égales. On satisfait donc à l'équation (1') en prenant e proportionnel à p. (*Addition de l'auteur.*)

pend pas de la forme de la surface touchée; elle est proportionnelle à la densité électrique au point touché, avant le contact. La difficulté, insurmontable dans la plupart des cas, consiste à trouver le coefficient de proportionnalité. Lorsqu'il s'agit d'une petite sphère, Poisson a pu déterminer le rapport de sa densité électrique moyenne à la densité au point de contact : ce rapport a pour valeur $\frac{\pi^2}{6}$.

Voici un autre cas dont notre équation fonctionnelle permet de faire la théorie. Le corps d'épreuve est le *corps de plus grande attraction,* dont l'équation polaire est

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{1}{a^2}. \tag{3}$$

La constante a est le *diamètre;* le corps, qui est de révolution autour de son diamètre, présente au pôle un aplatissement infini.

Imaginons qu'on mette en contact par leurs pôles deux corps de plus grande attraction; on les suppose tous deux conducteurs et l'on communique à leur ensemble une charge électrique M. Exprimons que toutes les répulsions électriques se font équilibre au point de contact; en affectant de l'indice 1 toutes les quantités relatives au deuxième corps, nous aurons

$$\int_\sigma \frac{e'\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma' = \int_{\sigma_1} \frac{e'_1\cos\varphi_1}{r_1^2}\,d\sigma'_1,$$

ou, en vertu des équations des deux corps, en désignant par m, m_1 leurs charges,

$$\frac{m}{a^2} = \frac{m_1}{a_1^2}. \tag{4}$$

Ainsi la charge totale se partage proportionnellement aux carrés des diamètres, c'est-à-dire aux surfaces.

Supposons maintenant le second corps isolé et possédant à lui seul la charge $M = m + m_1$. L'équation (1), appliquée au pôle, donne

$$e_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1} \frac{e'_1\cos\varphi_1}{r_1^2}\,d\sigma'_1 = \frac{m + m_1}{2\pi a_1^2}.$$

En combinant cette relation avec la relation (4), on trouve

$$e_1 = \frac{m}{2\pi}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a_1^2}\right),$$

et, si le premier corps est très petit par rapport au second,

$$m = 2\pi a^2 e_1. \tag{5}$$

D'après la théorie du corps d'épreuve, ce résultat subsiste lorsqu'on remplace le second corps de plus grande attraction par un conducteur quelconque. Le rapport cherché est $2\pi a^2$. L'aplatissement du corps d'épreuve au pôle fait qu'une erreur de contact assez grande n'influe pas sensiblement sur la distribution électrique du système.

IV. — Énergie électrique des conducteurs fermés.

A la formule (1) se rattache une expression nouvelle de l'énergie électrique qui, au point de vue analytique, n'est pas sans intérêt. Généralement, l'expression de la densité sur un conducteur comporte un facteur arbitraire, que l'on détermine en se donnant, soit la charge M, soit le potentiel V. Chacune de ces opérations conduit à une double intégration, de sorte que l'énergie $W = \frac{1}{2}MV$ se présente sous la forme du produit de deux intégrales doubles. On va voir qu'une seule intégrale double suffit à exprimer l'énergie électrique d'un conducteur fermé. Nous pouvons d'ailleurs supposer qu'un nombre quelconque de conducteurs, non influencés par des charges fixes, sont en présence.

Soient

M un point de l'un d'eux,
$m = e\,d\sigma$ la charge en ce point,
M′ un autre point du système,
m' sa charge,
ρ et ρ' les distances des points M et M′ à une origine fixe O.

Les divers éléments M′ exercent en M une répulsion totale dirigée suivant la normale extérieure n, et dont la valeur est $2\pi e$.

En projetant les répulsions composantes sur la direction ρ, on a donc

$$\mathrm{S}\frac{m'}{\overline{\mathrm{M'M}}^2}\cos(\mathrm{M'M}, \rho) = 2\pi e \cos(n, \rho).$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par $m\rho = e\rho\, d\sigma$, puis intégrant sur toute l'étendue des p surfaces conductrices, il vient

$$\mathrm{SS}\frac{mm'}{\overline{\mathrm{M'M}}^2}\rho\cos(\mathrm{M'M}, \rho) = \sum_p \int 2\pi e^2 \rho \cos(n, \rho)\, d\sigma.$$

On peut, dans le premier membre, grouper les termes deux à deux de manière à mettre en évidence la somme partielle

$$\frac{mm'}{\overline{\mathrm{M'M}}^2}[\rho\cos(\mathrm{M'M}, \rho) + \rho'\cos(\mathrm{M'M}, \rho')].$$

On reconnaît aisément que la parenthèse se réduit à M'M, en sorte que le premier membre de notre équation, $\mathrm{SS}\frac{mm'}{\mathrm{M'M}}$, représente l'énergie électrique W de tout le système. Nous avons donc la formule

$$(6) \qquad \mathrm{W} = 2\pi \sum_p \int e^2 \rho \cos(n, \rho)\, d\sigma.$$

Elle est susceptible d'une légère transformation. Appelons $d\omega$ l'élément de surface sphérique décrite du point O comme centre avec l'unité pour rayon; suivant que le rayon vecteur ρ sort du conducteur ou y pénètre, on aura

$$\cos(n, \rho)\, d\sigma = \pm \rho^2\, d\omega,$$

et, en regardant comme négatifs les rayons vecteurs qui entrent dans le conducteur, comme positifs ceux qui en sortent, l'équation (6) devient

$$(7) \qquad \mathrm{W} = 2\pi \sum_p \int e^2 \rho^3\, d\omega.$$

Pour une sphère de rayon R, la formule (7) donne immédiatement l'expression connue $\mathrm{W} = 8\pi^2\mathrm{R}^3 e^2$.

V. — Énergie électrique d'un disque plan.

La méthode de calcul qui précède n'est pas directement applicable à l'énergie des disques, calottes, zones, etc. Il faut connaître la distribution de l'électricité sur les corps épais dont l'aplatissement peut donner naissance à ces surfaces.

Avant d'aborder le calcul de l'énergie d'un disque plan à contour quelconque, nous ferons quelques remarques relatives à la distribution de l'électricité sur l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{8}$$

Si c désigne le demi petit axe, cet ellipsoïde est aplati dans le sens de l'axe des z. On sait que la densité électrique e en un point de la surface est proportionnelle à

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^4}x^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^4}y^2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1 - r^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^4}\cos^2\psi + \frac{b^2 - c^2}{b^4}\sin^2\psi\right)}},$$

r et ψ représentant les coordonnées polaires dans le plan des xy.

Le plan qui passe par l'axe des z et par le point considéré coupe l'ellipse du plan des xy suivant un diamètre dont la demi-longueur α est donnée par la formule

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}. \tag{9}$$

Posons maintenant

$$\frac{a^2 - c^2}{a^4}\cos^2\psi + \frac{b^2 - c^2}{b^4}\sin^2\psi = \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \tag{10}$$

et désignons par e_0 la densité au sommet du petit axe; nous aurons

$$e = e_0\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 r^2}}. \tag{11}$$

Si l'ellipsoïde dégénère en disque elliptique ($c = 0$), ε^2 tend vers 1, et le rapport $\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}$ tend vers une limite k^2, finie et différente de zéro,

$$k^2 = \frac{b^2\cos^2\psi + a^2\sin^2\psi}{b^4\cos^2\psi + a^4\sin^2\psi}. \tag{12}$$

Remarquons enfin que, si γ désigne le rayon de courbure au sommet le plus aigu de la section correspondant à l'azimut ψ, le rapport $\frac{c^2}{\gamma}$ reste toujours égal à la quantité finie α.

Cela posé, considérons un disque plan à contour quelconque. Nous prendrons son plan pour plan xy (ou des r, ψ), et, pour fixer les idées, nous placerons l'origine au centre de gravité O du disque. Nous supposerons que le contour ne présente pas de point anguleux. En général, le disque résultera de l'aplatissement continu et indéfini d'une surface fermée dépourvue de toute singularité. Aux environs d'un point, cette surface pourra être confondue avec un ellipsoïde; les parties extrêmes des sections azimutales seront assimilables à des arcs d'ellipse très fortement courbés.

Nous supposerons le corps aplati symétrique par rapport au plan des xy (ou des r, ψ). Il suffira de calculer l'énergie pour la moitié supérieure et de doubler. De cette façon la formule (6) devient,

$$W = 4\pi\int c^2\rho\cos(n,\rho)\,d\sigma. \tag{6'}$$

Par analogie avec ce qui a lieu pour l'ellipsoïde, nous pouvons poser

$$c = \frac{\lambda\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 r^2}}, \tag{13}$$

α étant la valeur de r en un point de la ligne de contour, λ et ε deux fonctions de r et de ψ, dont la seconde prend la valeur 1 lorsque, le corps dégénérant en un disque, son épaisseur centrale c tend vers zéro, de telle façon que le rapport $\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}$ tende vers une limite k^2 finie et différente de zéro. Enfin, si l'on désigne par γ le rayon de courbure minimum d'une section azimutale, le rapport $\frac{c^2}{\gamma}$ tendra aussi vers une limite finie β.

Concevons l'ellipse osculatrice au sommet aigu de la section considérée, et soit son équation

$$(14)\qquad \frac{r'^2}{\alpha'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

Son rayon de courbure minimum $\frac{c'^2}{\alpha'}$ ayant pour valeur γ, on en conclut facilement

$$(15)\qquad \lim\frac{c'}{c}=\sqrt{\frac{\alpha'}{\beta}}.$$

Maintenant, comme on a

$$d\sigma=\frac{r\,dr\,d\psi}{\cos(n,z)},$$

l'expression (6′) de l'énergie devient

$$W=4\pi\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\alpha}e^2\rho\frac{\cos(n,\rho)}{\cos(n,z)}\,r\,dr.$$

L'intégrale par rapport à r est une intégrale *singulière* qui n'a de valeur sensible que pour $r=\alpha$. En effet, sauf dans le voisinage de la ligne de contour, le rapport $\frac{\cos(n,\rho)}{\cos(n,z)}$ a une valeur insensible; sur cette ligne même, il est infini; il nous suffira donc de calculer sa valeur pour les points voisins du contour, et nous serons en droit d'écrire les égalités approchées

$$\frac{\cos(n,\rho)}{\cos(n,z)}=\frac{\cos(n',r')}{\cos(n',z)}=-\frac{dz}{dr'},$$

et, en tenant compte de l'équation (14),

$$\begin{aligned}\frac{\cos(n,\rho)}{\cos(n,z)}&=\frac{c'^2r'}{\alpha'^2z}=\frac{c'}{\alpha'}\frac{r'}{\sqrt{\alpha'^2-r'^2}}=\frac{c'}{\sqrt{\alpha'^2-r'^2}}\\&=\frac{c'}{c}\sqrt{\frac{\alpha+r}{\alpha'+r'}}\frac{c}{\sqrt{\alpha^2-r^2}}=\frac{c'}{c}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\frac{c}{\sqrt{\alpha^2-r^2}},\end{aligned}$$

finalement, en vertu de l'équation (15),

$$\frac{\cos(n,\rho)}{\cos(n,z)}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{c}{\sqrt{\alpha^2-r^2}}.$$

En portant cette valeur dans l'expression de W, où nous ferons $\rho = \alpha$ et où nous remplacerons e par sa valeur (13), nous obtiendrons

$$W = 4\pi \int_0^{2\pi} \lambda^2 \alpha^3 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\, d\psi \int_0^{\alpha} \frac{cr\, dr}{(\alpha^2 - \varepsilon^2 r^2)\sqrt{\alpha^2 - r^2}}.$$

Si l'on pose

$$\sqrt{\alpha^2 - r^2} = t$$

et si l'on se rappelle que $\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}$ tend vers la limite finie k^2, l'intégrale

$$\int_0^{\alpha} \frac{cr\, dr}{(\alpha^2 - \varepsilon^2 r^2)\sqrt{\alpha^2 - r^2}}$$

devient

$$\int_0^{\alpha} \frac{k^2 c\, dt}{\alpha^2 c^2 + \varepsilon^2 k^2 t^2} = \frac{k}{\alpha\varepsilon}\left(\text{arc tang}\frac{\varepsilon k t}{\alpha c}\right)_0^{\alpha} = \frac{\pi k}{2\alpha}.$$

On a donc enfin

$$(16) \qquad W = 2\pi^2 \int_0^{2\pi} k \lambda^2 \alpha^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\, d\psi.$$

On voit que l'énergie électrique d'un disque plan s'exprime par une seule intégrale simple prise le long de son contour.

Pour appliquer la formule au disque elliptique, il faut faire

$$\beta = \alpha, \qquad \lambda = e_0,$$

remplacer α et k par leurs valeurs tirées des relations (9) et (12). On trouve ainsi

$$(17) \quad W = 2\pi^2 a^3 b^3 e_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(a^2 \sin^2\psi + b^2 \cos^2\psi)(a^4 \sin^2\psi + b^4 \cos^2\psi)}}.$$

CHAPITRE II.

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ A LA SURFACE D'UN SPHÉROÏDE CONDUCTEUR.

La principale application de notre équation fonctionnelle est la solution du problème de l'équilibre électrique d'un sphéroïde différant de la sphère d'une manière sensible. Nous supposons le sphéroïde dépourvu de toute singularité, pointe ou arête vive; mais sa surface peut être composée de portions raccordées de surfaces différentes. Il est soumis à l'influence d'un nombre quelconque p de points électrisés.

Mais, pour ne pas interrompre l'exposé de la solution, nous ferons quelques remarques préliminaires sur les développements en série, qui nous seront indispensables par la suite.

I. — Digression sur les développements en série.

Soit à développer en série entière un produit de puissances de séries ou de polynomes $A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda$:

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \\ B &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L &= l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots, \end{aligned}$$

les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant quelconques.

Lorsque aucun des termes constants $a_0, b_0, \ldots, l_0$ n'est nul, ce développement est toujours possible pour des valeurs suffisamment petites de x. En appelant

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots$$

la série cherchée et en égalant la dérivée logarithmique de U à celle du produit donné, on a

$$\frac{U'}{U} = \alpha \frac{A'}{A} + \beta \frac{B'}{B} + \ldots + \lambda \frac{L'}{L}.$$

L'identification des deux membres de cette égalité, qui sont rationnels en x, fournit les inconnues u_0, u_1, u_2, ... Voici le résultat de ce calcul.

Désignons par s_p la somme de tous les produits $ab\ldots l$ pour lesquels la somme des indices est égale à p. En convenant de traiter les indices comme des exposants, on fixe la signification des symboles $\left(\frac{\partial s_p}{\partial a}\right)$, $\left(\frac{\partial s_p}{\partial b}\right)$, ..., $\left(a\frac{\partial s_p}{\partial a}\right)$, $\left(b\frac{\partial s_p}{\partial b}\right)$, ... Posons

$$(18) \qquad s'_p = \alpha\left(a\frac{\partial s_p}{\partial a}\right) + \beta\left(b\frac{\partial s_p}{\partial b}\right) + \ldots + \lambda\left(l\frac{\partial s_p}{\partial l}\right).$$

Les coefficients u seront donnés par la relation récurrente

$$(19) \qquad ps_0 u_p = [s'_1 - (p-1)s_1]u_{p-1} + [s'_2 - (p-2)s_2]u_{p-2} + \ldots + s'_p u_0,$$

à laquelle il faut adjoindre l'expression du premier terme

$$u_0 = a_0^\alpha b_0^\beta \ldots l_0^\lambda.$$

On conclut de là, pour exprimer u_p, un déterminant qu'il est inutile d'écrire. Les a, b, ..., l étant finis par hypothèse, les coefficients u sont visiblement finis. Si l'on appelle *poids d'une lettre a* le produit de son indice par son exposant, *poids d'un terme ab...l* la somme des poids des lettres qui y entrent, u_p est une fonction rationnelle, homogène et de poids p des a, b, ..., l.

II. — Solution du problème par une série d'intégrales définies.

Soit en coordonnées polaires (ρ, θ, ψ)

$$(20) \qquad \rho = R(1+n)$$

l'équation du sphéroïde. Considérons la famille de surfaces

$$(21) \qquad \rho = R(1+\alpha n),$$

où α désigne un paramètre compris entre 0 et 1; elles sont toutes comprises dans les parties du sphéroïde primitif extérieures à la sphère de rayon R et dans les parties de la sphère extérieures au

sphéroïde. Nous allons chercher la distribution de l'électricité sur l'un quelconque de ces sphéroïdes intermédiaires.

Soient M et M′ deux de ses points; ρ, θ, ψ et ρ', θ', ψ' leurs coordonnées; r la distance de M à M′, en grandeur et direction.

Au système fixe (θ', ψ') il est avantageux d'adjoindre un système de coordonnées (ω, φ) mobile avec le point M, dans lequel le nouvel axe des z passe par ce point. On passe du premier système au second par les formules bien connues

$$(22)\qquad \begin{cases} \cos\theta' = \cos\theta\cos\omega - \sin\theta\cos\varphi, \\ \cot(\psi' - \psi) = \dfrac{\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\cot\omega}{\sin\varphi}. \end{cases}$$

Désignons par ν l'angle de la normale extérieure au point M avec la direction de r; par e, e' les densités électriques aux points M, M′; par $q_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ la charge du point électrisé Q_i; par ρ_i, θ_i, ψ_i, ω_i, φ_i, r_i, ν_i les quantités relatives au point Q_i analogues aux quantités ρ', θ', ψ', ω, φ, r, ν relatives au point M′.

Lorsqu'on se donne le potentiel constant V du sphéroïde, la densité électrique au point M est complètement déterminée par l'équation fonctionnelle

$$(1')\qquad e = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{e'\cos\nu}{r^2}\,d\sigma' - \frac{1}{2\pi}\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{p} \frac{q_i\cos\nu_i}{r_i^2}.$$

Commençons par évaluer $\dfrac{\cos\nu}{r}$.

Si l'on appelle β l'angle des deux directions ρ et r, ζ l'angle de la normale extérieure au point M avec la direction ρ, λ l'angle du plan déterminé par ρ et par cette normale avec le plan méridien correspondant à l'azimut ψ, le trièdre dont les arêtes sont ρ, r et la normale donnera

$$\cos\nu = \cos\beta\cos\zeta + \sin\beta\sin\zeta\cos(\varphi - \lambda)$$

ou bien

$$(23)\qquad \cos\nu = \cos\beta\cos\zeta + \sin\beta(\sin\zeta\cos\lambda\cos\varphi + \sin\zeta\sin\lambda\sin\varphi).$$

Dans le triangle dont les côtés sont ρ, ρ', r, on a

$$(24)\qquad r^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\omega,$$

$$(25)\qquad \cos\beta = \frac{\rho'\cos\omega - \rho}{r}, \qquad \sin\beta = \frac{\rho'\sin\omega}{r}.$$

Les produits $\sin\zeta\cos\lambda$, $\sin\zeta\sin\lambda$ se calculeront de la manière suivante : la normale extérieure fait avec les directions des coordonnées polaires ρ, θ, ψ des angles ζ, ζ_1, ζ_2 déterminés par les formules

$$(26)\qquad \frac{\cos\zeta}{\rho} = \frac{\cos\zeta_1}{-\frac{\partial\rho}{\partial\theta}} = \frac{\cos\zeta_2}{-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\psi}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \frac{\partial\rho^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\rho^2}{\partial\psi^2}}}.$$

En projetant la normale extérieure sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur ρ, on obtient les relations

$$(27)\qquad \sin\zeta\cos\lambda = \cos\zeta_1, \qquad \sin\zeta\sin\lambda = \cos\zeta_2,$$

où $\cos\zeta_1$, $\cos\zeta_2$ doivent être remplacés par leurs valeurs (26).

Portant dans l'équation (23) les valeurs (25) et (27) trouvées pour $\cos\beta$, $\sin\beta$, $\sin\zeta\cos\lambda$, $\sin\zeta\sin\lambda$, et divisant les deux membres de cette équation par $r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\omega}$, on obtient finalement

$$(28)\qquad -\frac{\cos\nu}{r} = \frac{\rho^2 - \rho\rho'\cos\omega + \rho'\sin\omega\left(\cos\varphi\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\psi}\right)}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\omega)\sqrt{\rho^2 + \frac{\partial\rho^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\rho^2}{\partial\psi^2}}}.$$

L'expression de $-\frac{\cos\nu_i}{r_i}$ se déduirait de la précédente par le changement de ρ', ω, φ en ρ_i, ω_i, φ_i; mais, dans les transformations que nous ferons subir à l'équation (1'), nous aurons besoin de connaître la valeur de

$$(29)\qquad -\frac{\cos\nu_i}{r_i^2} = \frac{\rho^2 - \rho\rho_i\cos\omega_i + \rho_i\sin\omega_i\left(\cos\varphi_i\frac{\partial\rho}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi_i}{\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\psi}\right)}{\sqrt{(\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i\cos\omega_i)^3\left(\rho^2 + \frac{\partial\rho^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\rho^2}{\partial\psi^2}\right)}}.$$

Enfin, pour achever le calcul des termes qui figurent dans notre équation fonctionnelle, il faut évaluer le quotient $\frac{d\sigma'}{r}$. Si l'on conçoit que, dans l'expression du rayon vecteur ρ', on ait éliminé θ' et ψ' au moyen des formules de transformation (22), on trouvera aisément

$$(30)\qquad \frac{d\sigma'}{r} = \rho'\sqrt{\frac{\rho'^2 + \frac{\partial\rho'^2}{\partial\omega^2} + \frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial\rho'^2}{\partial\varphi^2}}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\omega}}\sin\omega\, d\omega\, d\varphi.$$

Cela posé, dans les expressions (28), (29), (30) de $-\frac{\cos\nu}{r}$, $-\frac{\cos\nu_i}{r_i^2}$, $\frac{d\sigma'}{r}$ et dans celle de la quantité

$$(31)\qquad \frac{1}{2Rr_i}=\frac{1}{2R\sqrt{\rho^2-\rho_i^2-2\rho\rho_i\cos\omega_i}},$$

qui apparaîtra dans les transformations ultérieures de l'équation fonctionnelle, remplaçons ρ par $R(1+\alpha n)$ et ρ' par $R(1+\alpha n')$; si l'on met en évidence le paramètre α, elles prendront la forme

$$(32)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\cos\nu}{r}=\dfrac{1}{2R}\,\dfrac{1+G_1\alpha+G_2\alpha^2}{(1+H_1\alpha+H_2\alpha^2)\sqrt{1+h_1\alpha+h_2\alpha^2}},\\[2ex] -\dfrac{\cos\nu_i}{r_i^2}=\dfrac{K_0+K_1\alpha+K_2\alpha^2}{\sqrt{(L_0+L_1\alpha+L_2\alpha^2)^3}(1+h_1\alpha+h_2\alpha^2)},\\[2ex] \dfrac{d\sigma'}{r}=R(1+\alpha n')\sqrt{\dfrac{1+h'_1\alpha+h'_2\alpha^2}{1+H_1\alpha+H_2\alpha^2}}\,\dfrac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}},\\[2ex] \dfrac{1}{2Rr_i}=\dfrac{1}{2R\sqrt{L_0+L_1\alpha+L_2\alpha^2}}, \end{cases}$$

où G_1, G_2 ont les valeurs

$$(33)\qquad \begin{cases} G_1=n+n'+\dfrac{n-n'+\sin\omega\left(\cos\varphi\dfrac{\partial n}{\partial\theta}+\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega},\\[3ex] G_2=\dfrac{n^2-nn'\cos\omega+n'\sin\omega\left(\cos\varphi\dfrac{\partial n}{\partial\theta}+\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega}, \end{cases}$$

et H_1, H_2, h_1, h_2, h'_1, h'_2, K_0, K_1, K_2, L_0, L_1, L_2 les valeurs

$$(33')\qquad \begin{cases} H_1=n+n', & H_2=\dfrac{n^2+n'^2-2nn'\cos\omega}{2(1-\cos\omega)},\\[2ex] h_1=2n, & h_2=n^2+\dfrac{\partial n^2}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial n^2}{\partial\psi^2},\\[2ex] h'_1=2n', & h'_2=n'^2+\dfrac{\partial n'^2}{\partial\omega^2}+\dfrac{1}{\sin^2\omega}\dfrac{\partial n'^2}{\partial\varphi^2},\\[2ex] K_0=R-\rho_i\cos\omega_i, & K_2=Rn^2,\\[1ex] K_1=(2R-\rho_i\cos\omega_i)n+\rho_i\sin\omega_i\left(\cos\varphi\dfrac{\partial n}{\partial\theta}+\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial n}{\partial\psi}\right), & \\[1ex] L_0=R^2+\rho_i^2-2R\rho_i\cos\omega_i, & \\ L_1=2Rn(R-\rho_i\cos\omega_i), & L_2=Rn^2. \end{cases}$$

Maintenant, les formules (18) et (19) du paragraphe I nous permettent de développer les expressions (32) en séries procédant suivant les puissances croissantes de α. Les développements seront de la forme suivante :

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\cos\nu}{r} = \frac{1}{2R}\left(1+\sum_{m=1}^{m=\infty} b_m \alpha^m\right),\\ &-\left(\frac{1}{2Rr_i}+\frac{\cos\nu_i}{r_i^2}\right) = -\frac{R^2-\rho_i^2}{2R\sqrt{(R^2+\rho_i^2-2R\rho_i\cos\omega_i)^3}}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=\infty} A_m\alpha^m,\\ &\frac{d\sigma'}{r} = R\left(1+\sum_{m=1}^{m=\infty} c_m\alpha^m\right)\frac{\sin\omega\, d\omega\, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}.\end{aligned}\right.$$

Le calcul des coefficients A_m, b_m, c_m serait pénible et n'offrirait d'ailleurs que peu d'intérêt. Nous retiendrons seulement l'expression de b_1, qui nous servira dans les applications aux sphéroïdes très peu différents de la sphère :

$$(35)\qquad b_1 = \frac{n\cos\omega - n' + \sin\omega\left(\cos\varphi\dfrac{\partial n}{\partial\theta}+\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega}.$$

Revenons à l'équation fonctionnelle (1') que nous pouvons écrire, en ajoutant et retranchant à son second membre $\displaystyle\mathop{\mathrm{S}}_1^p \frac{q_i}{4\pi R r_i}$,

$$e = -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{e'\cos\nu}{r}\frac{d\sigma'}{r} + \frac{1}{4\pi R}\mathop{\mathrm{S}}_1^p \frac{q_i}{r_i}$$
$$- \frac{1}{2\pi R}\mathop{\mathrm{S}}_1^p q_i\left(\frac{1}{2Rr_i}+\frac{\cos\nu_i}{r_i^2}\right).$$

Substituons-y les séries (34) et décomposons l'intégrale $\int_\sigma$ en deux autres, dont la première correspondra au premier terme $\frac{1}{2R}$ du développement de $-\frac{\cos\nu}{r}$ et la seconde aux termes restants. Posons, pour abréger,

$$(36)\qquad a_m = b_1 c_{m-1} + b_2 c_{m-2} + \ldots + b_m;$$

il viendra

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} e &= \frac{1}{4\pi R}\left[\int_\sigma \frac{e'\,d\sigma'}{r} + \mathop{\mathrm{S}}_1^p \frac{q_i}{r_i} + \mathop{\mathrm{S}}_1^p q_i \frac{R^2-\rho_i^2}{\sqrt{(R^2+\rho_i^2-2R\rho_i\cos\omega_i)^3}}\right] \\ &+ \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e' \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m \alpha^m \frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}} + \mathop{\mathrm{S}}_1^p q_i \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \alpha^m\right]. \end{aligned}\right.$$

Posons maintenant

$$(38)\qquad e = e_0 + e_1\alpha + e_2\alpha^2 + \ldots + e_m\alpha^m + \ldots.$$

Le terme général e_m est une fonction des angles θ, ψ qu'il s'agit de déterminer; si l'on y remplace θ, ψ par θ', ψ', e_m se changera en e'_m, qui deviendra une fonction de ω, φ, lorsqu'on aura éliminé θ', ψ' au moyen des formules de transformation (22).

Dans l'équation (37), substituons les développements de e et de e', et remarquons que la somme $\int_\sigma \frac{e'\,d\sigma'}{r} + \mathop{\mathrm{S}}_1^p \frac{q_i}{r_i}$ n'est autre chose que le potentiel V du sphéroïde. Les deux membres sont deux séries entières en α, qui doivent être identiques : on en conclut

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{4\pi R}\left[V + \mathop{\mathrm{S}}_1^p q_i \frac{R^2-\rho_i^2}{\sqrt{(R^2+\rho_i^2-2R\rho_i\cos\omega_i)^3}}\right], \\ e_m &= \frac{1}{4\pi}\left[\mathop{\mathrm{S}}_1^p A_m q_i + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (e'_0 a_m + e'_1 a_{m-1} + \ldots + e'_{m-1} a_1) \frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Les formules (38) et (39) résolvent le problème proposé. Comme elles expriment chacune des fonctions e_m à l'aide des fonctions d'indice moindre, elles permettent de calculer ces fonctions de proche en proche; du moins elles ramènent ce calcul à une suite de quadratures qui, à défaut d'une évaluation exacte, généralement impossible, donnent prise aux méthodes d'approximation indéfinie telles que celle de Gauss. La densité électrique en un point du sphéroïde primitif s'obtient en faisant $\alpha = 1$ dans la série (38).

Il peut arriver que le sphéroïde donné fasse partie d'une famille naturelle de surfaces dépendant d'un paramètre α et se réduisant à une sphère pour la valeur zéro de ce paramètre. On dé-

veloppera en série suivant les puissances croissantes de α le rayon vecteur

$$\rho = R(1 + \alpha n_1 + \alpha^2 n_2 + \ldots),$$

et l'on suivra la marche qui vient d'être indiquée. La seule différence consistera en ce que dans les formules (32) figureront actuellement des séries et non des polynomes en α.

Enfin le rayon vecteur peut dépendre de plusieurs paramètres et devenir constant pour des valeurs nulles de tous ces paramètres: on le développera en série multiple.

III. — Convergence de la série.

Il reste à examiner les conditions de convergence de la série (38). Nous nous bornerons au cas le plus intéressant, celui où le sphéroïde n'est soumis à aucune influence. Les formules de résolution (39) se réduisent alors à

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} e_0 &= \frac{V}{4\pi R}, \\ e_m &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (e'_0 a_m + e'_1 a_{m-1} + \ldots + e'_{m-1} a_1) \frac{\sin\omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}. \end{aligned} \right.$$

Montrons d'abord, ce qui est loin d'être évident au point de vue analytique, que e_m est toujours fini; il suffit de prouver que la parenthèse $(e'_0 a_m + e'_1 a_{m-1} + \ldots + e'_{m-1} a_1)$ ne devient jamais infinie, puisque l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}$$

a la valeur finie 4π.

La relation récurrente qui lie les fonctions e_m de proche en proche montre que cette parenthèse est finie en même temps que les coefficients a_m. Or ces coefficients, définis par la relation (36), sont des fonctions entières, homogènes et de poids m des b et des c. Si l'on se rappelle les conclusions du paragraphe I, on verra que b_m est une fonction linéaire, homogène et de poids m, des quantités G_1, G_2, H_1, H_2, h_1, h_2, que c_m est une fonction linéaire,

homogène et de poids m, des quantités n', H_1, H_2, h'_1, h'_2 [formules (33) et (38')]. Parmi ces quantités, les seules qui pourraient devenir infinies, et cela pour $\omega = 0$, sont G_1, G_2, H_2, h'_2. Nous allons faire voir qu'il n'en est rien.

A cause de l'absence supposée de singularités, on peut, dans les environs du point $M(\rho, \theta, \psi)$, développer n' par la formule de Taylor

$$n' = n + \frac{\partial n}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial n}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} \frac{d\theta^2}{2} + \frac{\partial^2 n}{\partial \theta \, \partial \psi} d\theta \, d\psi + \frac{\partial^2 n}{\partial \psi^2} \frac{d\psi^2}{2}.$$

Si le point M est sur la ligne de séparation de deux portions raccordées de surfaces différentes, les dérivées secondes de n auront en général des valeurs différentes de part et d'autre de cette ligne.

Quand ω a une valeur infiniment petite $d\omega$, θ' et ψ' ont des valeurs $\theta + d\theta$ et $\psi + d\psi$ très voisines de θ et de ψ. Les formules de transformation (22) donnent alors pour $d\theta$ et $d\psi$ les expressions

$$d\theta = \cos\varphi \, d\omega,$$

$$d\psi = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} d\omega.$$

Si donc on pose

$$u = \cos\varphi \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial n}{\partial \psi},$$

$$v = \cos^2\varphi \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} + 2\cos\varphi \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial^2 n}{\partial \theta \, \partial \psi} + \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 n}{\partial \psi^2},$$

il viendra

$$n' = n + u \, d\omega + v \frac{d\omega^2}{2}.$$

Substituant cette valeur de n' dans les formules (33) et (33'), où l'on remplacera $\sin\omega$ par $d\omega$, $1 - \cos\omega$ par $\frac{d\omega^2}{2}$, on trouvera pour valeurs limites de G_1, G_2, H_2

$$G_1 = 2n - v, \qquad G_2 = \frac{n^2}{2} + u^2 - nv, \qquad H_2 = n^2 + u^2.$$

Ainsi, même pour $\omega = 0$, G_1, G_2, H_2 demeurent finis; mais alors ils deviennent indéterminés, puisqu'ils dépendent de l'angle φ,

c'est-à-dire du chemin que suit le point M' pour se rendre au point M.

Pour prouver que la quantité

$$h'_2 = n'^2 + \frac{\partial n'^2}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial n'^2}{\partial \varphi^2}$$

ne devient pas infinie pour $\omega = 0$, il suffit de montrer que $\frac{\partial n'}{\partial \varphi}$ est aux environs du point M du même ordre que $\sin \omega = d\omega$. Cela résulte de l'expression précédemment trouvée pour n', qui, différentiée par rapport à φ, donne

$$\frac{\partial n'}{\partial \varphi} = d\omega \frac{\partial u}{\partial \varphi} = d\omega \left(-\sin \varphi \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \psi} \right).$$

Ainsi les coefficients e_m de la série (38) ont toujours des valeurs finies et, de plus, déterminées, car l'indétermination du seul élément qui correspond à $\omega = 0$ ne peut influer sur les intégrales qui représentent ces coefficients.

Cherchons maintenant une limite inférieure de convergence de la série

$$(38') \qquad e = e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_m + \ldots.$$

Si l'on désigne par $\mathcal{A}_m$ la plus grande valeur absolue de a_m, par $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_m, \ldots$ une suite de quantités dont la première est égale à e_0 et dont les autres sont déterminées par la relation

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_0 \mathcal{A}_m + \mathcal{E}_1 \mathcal{A}_{m-1} + \ldots + \mathcal{E}_{m-1} \mathcal{A}_1,$$

on voit, en se reportant aux formules (40), que $\mathcal{E}_m$ est une limite supérieure de e_m. La convergence de la série (38') est alors entraînée par celle de la série

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_m + \ldots.$$

On peut remarquer que la série $\mathcal{E}$ diverge, si l'un quelconque des $\mathcal{A}_m$ est supérieur ou égal à l'unité. En effet, $\mathcal{E}_m$ est visiblement une fonction entière, de poids m, homogène quant au poids, à coefficients tous entiers et *positifs*, des quantités positives $\mathcal{A}$. Si p est un diviseur de m, $\mathcal{E}_m$ contiendra le terme $\mathcal{E}_0 \mathcal{A}_p^{\frac{m}{p}}$ avec le

coefficient $+1$. On peut prendre m aussi grand qu'on veut; si $\mathcal{A}_p$ est supérieur ou égal à 1, $\mathcal{C}_m$ ne tend pas vers zéro.

On reconnaît aisément que la série $\mathcal{C}$ converge si $\sqrt[m]{\mathcal{A}_m}$ est constamment inférieur à un nombre plus petit que $\frac{1}{2}$. Cette condition exige que le sphéroïde ne soit pas trop différent de la sphère; en effet, la grandeur des quantités $\mathcal{A}_m$ dépend de l'excentricité du sphéroïde, puisque a_m est une fonction homogène, de degré entier m, de n, $\frac{\partial n}{\partial\theta}$, $\frac{\partial n}{\partial\psi}$, n', $\frac{\partial n'}{\partial\omega}$, $\frac{\partial n'}{\partial\varphi}$. Malheureusement le critérium de convergence suffisante qui vient d'être indiqué limite beaucoup plus qu'il n'est nécessaire le domaine dans lequel peut se mouvoir cette excentricité.

Lorsque la série (38′) n'est pas convergente, la méthode n'est pas applicable au sphéroïde donné; mais elle convient certainement encore aux sphéroïdes intermédiaires, définis par l'équation $\rho = R(1 + \alpha n)$, pour toutes les valeurs de α inférieures à $\frac{1}{2\max.\sqrt[m]{\mathcal{A}_m}}$.

IV. — Charge du sphéroïde.

Revenons à la série

$$e = e_0 + e_1\alpha + e^2\alpha^2 + \ldots + e_m\alpha^m, \tag{38}$$

et arrêtons-la au terme de degré m : la densité électrique est évaluée avec une approximation de l'ordre m. Mais, pour déterminer la charge M du sphéroïde, avec *la même* approximation, il suffit, comme on va voir, d'évaluer la densité avec une approximation de l'ordre $m - 1$.

Supposons que l'on développe, suivant les puissances de α, le quotient

$$\frac{d\sigma}{\rho} = (1 + f_1\alpha + f_2\alpha^2 + \ldots + f_m\alpha^m)\sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Le potentiel constant a pour valeur au centre

$$V = R^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(e_0 + e_1\alpha + \ldots + e_m\alpha^m)(f_0 + f_1\alpha + \ldots + f_m\alpha^m)\sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

En vertu de la première relation (40), le potentiel V a, pour

tous les sphéroïdes $\rho = R(1 + \alpha n)$, la même valeur $4\pi R e_0$. On en conclut que l'égalité précédente est une identité en α; d'où, en égalant à zéro le coefficient de α^m dans le second membre,

$$(41) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (e_0 f_m + e_1 f_{m-1} + \ldots + e_m) \sin\theta \, d\theta \, d\psi = 0.$$

La charge électrique a pour expression

$$M = \int_\sigma e \, d\sigma = \int_\sigma e \frac{d\sigma}{\rho} R(1 + \alpha n)$$
$$= R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (e_0 + e_1 \alpha + \ldots + e_m \alpha^m)(1 + f_1 \alpha + \ldots + f_m \alpha^m)(1 + \alpha n) \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Mais, en vertu de la condition (41), cette expression se réduit à

$$(42) \qquad M = R^2 \left[4\pi e_0 + \sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} n(e_0 f_{i-1} + e_1 f_{i-2} + \ldots + e_{i-1}) \sin\theta \, d\theta \, d\psi \right].$$

La fonction e_{i-1} du plus haut indice qui y figure est e_{m-1}, et non e_m.

V. — Sphéroïdes très peu différents de la sphère. Sphéroïdes composés.

Supposons le sphéroïde assez peu différent de la sphère pour que les puissances de n supérieures à la première soient négligeables : c'est le cas traité par Poisson. L'expression donne alors, en y remplaçant e_0 par $\frac{V}{4\pi R}$,

$$(43) \qquad M = VR \left(1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} n \sin\theta \, d\theta \, d\psi \right).$$

L'intégrale qui figure au second membre est proportionnelle à l'excès du volume du sphéroïde sur celui de la sphère de rayon R. On en conclut que, au degré d'approximation adopté, tous les sphéroïdes de même volume qui possèdent la même charge sont au même potentiel (¹).

(¹) *Voir* dans la troisième Partie du Mémoire le paragraphe intitulé *Sur le conducteur de capacité électrique minima.*

La série qui représente la densité électrique se réduit à ses deux premiers termes :

$$e = e_0 + e_1 = \frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a_1 \frac{\sin\omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}\right];$$

et, comme en vertu des relations (35) et (36) on a

$$a_1 = b_1 = \frac{n\cos\omega - n' + \sin\omega\left(\cos\varphi \frac{\partial n}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega},$$

il en résulte

$$(44)\quad e = \frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{n\cos\omega - n' + \sin\omega\left(\cos\varphi \frac{\partial n}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega} \frac{\sin\omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}\right].$$

On résout ainsi, par une intégrale définie, le problème que Poisson a résolu au moyen d'un développement en série de fonctions sphériques.

Lorsque le rayon vecteur du sphéroïde est, pour toutes les régions de la surface, une même fonction des deux angles θ et ψ, nous dirons que le sphéroïde est *simple;* nous dirons qu'un sphéroïde est *composé* s'il est formé de portions raccordées de sphéroïdes simples. Le problème de l'équilibre électrique d'un sphéroïde composé se simplifie lorsqu'on connaît la distribution de l'électricité sur chacun des sphéroïdes simples, supposés complets, qui composent sa surface.

Pour fixer les idées, nous supposerons que ces sphéroïdes simples sont au nombre de deux seulement. Soient n, n_1 leurs excentricités en un quelconque de leurs points. Désignons par e la densité électrique en un point de la portion du premier sphéroïde simple conservée dans le sphéroïde composé, pour un potentiel égal à V ; par ε la densité connue au même point du premier sphéroïde simple, supposé complet, pour le même potentiel ; par e_1, ε_1 les quantités analogues à e, ε pour le second sphéroïde simple. Je dis que l'on aura

$$(45)\quad \begin{cases} e = \varepsilon + \dfrac{V}{16\pi^2 R}\displaystyle\iint \frac{n' - n'_1}{1-\cos\omega}\frac{\sin\omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}, \\[2ex] e_1 = \varepsilon_1 + \dfrac{V}{16\pi^2 R}\displaystyle\iint \frac{n'_1 - n'}{1-\cos\omega}\frac{\sin\omega \, d\omega \, d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}, \end{cases}$$

la première intégrale double s'étendant à la portion conservée du second sphéroïde simple, et la seconde à la portion conservée du premier.

Pour démontrer les formules (45), il suffit d'observer que l'expression de la densité est

$$e = \frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{n\cos\omega - \nu' + \sin\omega\left(\cos\varphi\dfrac{\partial n}{\partial\theta} + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega}\,\frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}\right],$$

où la quantité ν' affecte, suivant la région où se trouve le point (ω, φ), l'une des deux formes analytiques n', n'_1. Si l'on ajoute et retranche l'intégrale

$$\frac{V}{16\pi^2 R}\iint \frac{n'}{1-\cos\omega}\,\frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}},$$

étendue à la portion supprimée du premier sphéroïde simple, l'expression précédente s'écrira

$$e = \frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{n\cos\omega - n' + \sin\omega\left(\cos\varphi\dfrac{\partial n}{\partial\theta} + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\dfrac{\partial n}{\partial\psi}\right)}{1-\cos\omega}\,\frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}\right]$$
$$+ \frac{V}{16\pi^2 R}\iint \frac{n'-n'_1}{1-\cos\omega}\,\frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}},$$

la seconde intégrale s'étendant à la partie conservée du second sphéroïde. On en conclut la première des formules (45).

L'extension de ces formules au cas où les sphéroïdes composants sont en nombre quelconque est évidente.

VI. — Distribution de l'électricité sur un conducteur ovoïde.

Appliquons ces résultats au conducteur ovoïde formé par deux demi-ellipsoïdes de révolution qui se raccordent à l'équateur. Si l'on prend pour origine le centre commun, pour plan des ψ l'équateur, les équations des deux ellipsoïdes, supposés très peu différents de la sphère, sont

$$(46)\qquad n = \nu\cos^2\theta, \qquad n_1 = \nu_1\cos^2\theta,$$

ν, ν_1 désignant les excentricités aux deux pôles.

Calculons d'abord la charge en fonction du potentiel. Soit R le rayon équatorial. L'équation (43) donne

$$M = VR\left(1 + \frac{\nu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\psi + \frac{\nu_1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\,d\psi\right),$$

$$(47) \qquad M = VR\left(1 + \frac{\nu + \nu_1}{6}\right).$$

Les densités électriques en deux points situés sur le même méridien à égale distance de l'équateur sont données par les formules (45), qui deviennent

$$(48) \qquad e = \varepsilon + \frac{V}{16\pi^2 R}J, \qquad e_1 = \varepsilon_1 - \frac{V}{16\pi^2 R}J,$$

si l'on pose

$$(49) \qquad \begin{cases} J = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_\gamma^{\pi}\frac{n' - n'_1}{1 - \cos\omega}\,\frac{\sin\omega\,d\omega\,d\varphi}{\sqrt{2(1 - \cos\omega)}} \\ \quad = (\nu - \nu_1)\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\theta'\,\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{2}\,d\varphi, \end{cases}$$

γ désignant le plus petit arc, compris entre le point (θ, ψ) et l'équateur, du grand cercle qui passe par le point fixe (θ, ψ) et par le point variable (ω, φ).

Commençons par évaluer ε : c'est la densité électrique au point (θ, ψ) du premier ellipsoïde, supposé complet, lorsque le potentiel est égal à V. Elle est, comme on sait, proportionnelle à la distance du centre au plan tangent mené par le point (θ, ψ). Au degré d'approximation adopté, cette distance est égale à $R(1+n)$; et, si l'on appelle μ la charge, on aura, en appliquant une formule connue,

$$\varepsilon = \frac{\mu R(1+n)}{4\pi R^3(1+\nu)} = \frac{\mu}{4\pi R^2}(1-\nu)(1+n).$$

D'ailleurs, si, dans l'expression (47), on fait $\nu_1 = \nu$ et, par suite, $M = \mu$, il vient

$$\mu = VR\left(1 + \frac{\nu}{3}\right);$$

il en résulte

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{V}{4\pi R}\left(1-\frac{2\nu}{3}\right)(1+n) = \frac{V}{4\pi R}\left(1-\nu\,\frac{2-3\cos^2\theta}{3}\right),\\ \varepsilon_1 &= \frac{V}{4\pi R}\left(1-\frac{2\nu_1}{3}\right)(1+n_1) = \frac{V}{4\pi R}\left(1-\nu_1\,\frac{2-3\cos^2\theta}{3}\right). \end{aligned}\right.$$

Passons maintenant au calcul de l'intégrale double (49); en y faisant

$$(51)\qquad \cos\theta' = \cos\theta\cos\omega - \sin\theta\sin\omega\cos\varphi,$$

elle devient

$$(52)\quad J = (\nu-\nu_1)\left(\cos^2\theta\int_0^{2\pi} J_1\,d\varphi + \sin^2\theta\int_0^{2\pi} J_2\cos^2\varphi\,d\varphi - 2\sin\theta\cos\theta\int_0^{2\pi} J_3\cos\varphi\,d\varphi\right),$$

si l'on pose

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} J_1 &= \int_\gamma^\pi \frac{\cos^2\omega\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{2},\\ J_2 &= \int_\gamma^\pi \frac{\sin^2\omega\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{2},\\ J_3 &= \int_\gamma^\pi \frac{\sin\omega\cos\omega\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{2}. \end{aligned}\right.$$

Entre J_1 et J_2 existe la relation

$$(54)\qquad J_1 + J_2 = \int_\gamma^\pi \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\frac{d\omega}{2} = \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} - 1,$$

qui permet de conclure J_1 de J_2. On trouve aisément

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} J_2 &= \frac{8}{3} - 4\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{4}{3}\sin^3\frac{\gamma}{2},\\ J_3 &= -2\left(\cos\frac{\gamma}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{\gamma}{2} + \log\operatorname{tang}\frac{\gamma}{4}\right). \end{aligned}\right.$$

Transportons les valeurs (54) et (55) de J_1, J_2, J_3 dans l'expression (52) de J. Après cette substitution apparaissent certaines intégrales où γ ne figure pas : nous pouvons évaluer celles-là : pour les autres, il faut exprimer φ en fonction de γ. Or γ est ce que devient ω pour $\theta' = \frac{\pi}{2}$. Cette hypothèse, introduite dans la relation (51), donne

$$\cos\varphi = \cot\theta \cot\gamma,$$

d'où

$$d\varphi = \frac{\cos\theta}{\sin\gamma\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\gamma}}\, d\gamma.$$

Finalement on trouve

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{J}{\nu - \nu_1} = {} & 2\pi\frac{4 - 15\cos^2\theta}{3} + 8\cos^3\theta \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \frac{\cos\gamma \log\tang\frac{\gamma}{4}\, d\gamma}{\sin^2\gamma\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\gamma}} \\ & + \frac{8\sqrt{2}}{3}\cos^3\theta \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \frac{2 + 3\cos\gamma}{1 + \cos\gamma} \frac{d\gamma}{\sin\gamma\sqrt{1 - \cos\gamma}\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2\gamma}}. \end{aligned} \right.$$

Les deux intégrales définies qui figurent dans l'expression de J ne peuvent être représentées au moyen des fonctions de l'Algèbre élémentaire; la seconde a la forme d'une période elliptique. Le problème ne pourrait être achevé que par des développements en série que nous ne chercherons pas à effectuer.

La formule (56) est inapplicable au pôle, où l'on a $\theta = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Mais, si l'on introduit directement ces hypothèses dans la formule de départ (49), on trouve immédiatement

$$(57)\qquad J_P = 2\pi\frac{8\sqrt{2} - 11}{3}(\nu - \nu_1).$$

La formule (56) donnerait un résultat erroné si l'on cherchait à l'appliquer aux points de l'équateur; car, en ces points, l'intégration par rapport à φ doit s'étendre seulement de 0 à π, et non de 0 à 2π. Si, dans l'expression (49), on fait

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \cos\theta' = -\sin\omega\cos\varphi,$$

on trouve alors pour valeur de J à l'équateur

$$(58) \qquad J_E = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\omega \cos\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}} \frac{d\omega}{2} = \frac{4\pi}{3}(\nu - \nu_1).$$

Aux pôles, les formules (50) donnent

$$\varepsilon = \frac{V}{4\pi R}\left(1 + \frac{1}{3}\nu\right), \qquad \varepsilon_1 = \frac{V}{4\pi R}\left(1 + \frac{1}{3}\nu_1\right);$$

à l'équateur,

$$\varepsilon = \frac{V}{4\pi R}\left(1 - \frac{2}{3}\nu\right), \qquad \varepsilon_1 = \frac{V}{4\pi R}\left(1 - \frac{2}{3}\nu_1\right).$$

En portant ces valeurs et celles de J_P (57) et de J_E (58) dans les formules (48), on trouve :

Densité au premier pôle :

$$\frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{\nu}{3} + \frac{8\sqrt{2} - 11}{6}(\nu - \nu_1)\right];$$

densité au deuxième pôle :

$$\frac{V}{4\pi R}\left[1 + \frac{\nu_1}{3} - \frac{8\sqrt{2} - 11}{6}(\nu - \nu_1)\right];$$

densité à l'équateur :

$$\frac{V}{4\pi R}\left(1 - \frac{\nu + \nu_1}{3}\right).$$

Comme on devait s'y attendre, la densité électrique reste continue lorsqu'on passe par l'équateur de l'un des demi-ellipsoïdes à l'autre.

DEUXIÈME PARTIE.

LES CONDUCTEURS OUVERTS.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE.

I. — Équation caractéristique des conducteurs ouverts.

Nous supposerons la surface ouverte S dépourvue de toute singularité; telles sont la zone, la calotte sphériques. Pour éviter les longueurs, nous dirons que l'une de ses faces est extérieure et l'autre intérieure.

Soient

M et M′ deux points de la surface S, supposée conductrice et chargée d'électricité;

r la distance de M à M′, en grandeur et en direction;

MN_1 la normale extérieure;

$MN_2 = n$ la normale intérieure au point M;

e_1, e_2 les densités des couches électriques extérieure et intérieure au même point;

e'_1, e'_2 les densités extérieure et intérieure en M′ (ces densités sont partout finies et continues excepté sur les bords);

Q_i un des p points électrisés qui agissent par influence sur S;

q_i sa charge;

r_i la distance de M à Q_i.

Supposons qu'on sache résoudre ce problème: Trouver la couche de densité $e_1 + e_2$ en équilibre sur S sous l'influence des masses fixes données. C'est le problème ordinaire de potentiel de surface posé par Green et par Gauss.

Il reste à répartir cette couche entre les deux faces du conducteur. On va voir que, pour faire ce départ, une quadrature suffit.

La surface conductrice S résulte de l'aplatissement indéfini d'un conducteur d'épaisseur très petite dont la face externe S_1 et la face interne S_2 tendent vers S comme limite commune. C'est sur ce conducteur mince que nous allons raisonner.

La normale à S au point M perce S_1 et S_2 en deux points M_1 et M_2. Dans le plan tangent à S au point M décrivons de M comme centre un cercle C de rayon très petit, quoique très grand par rapport à l'épaisseur $M_1 M_2$; projetons ce cercle en C_1, C_2 sur S_1, S_2.

Les composantes normales de toutes les répulsions qui agissent au point M, intérieur au conducteur $S_1 S_2$, s'entre-détruisent pour l'équilibre. Sans entrer dans des explications inutiles, nous voyons que les diverses parties du système donnent, suivant la normale intérieure n, les composantes suivantes :

Le cercle C_1 :

$$+ 2\pi e_1,$$

le cercle C_2 :

$$- 2\pi e_2,$$

le reste du conducteur :

$$- \int_S \frac{(e'_1 + e'_2)\cos(r, n)}{r^2}\, dS',$$

les masses inductrices :

$$- \mathop{\mathrm{S}}_1^p q_i \frac{\cos(r_i, n)}{r_i^2}.$$

D'où l'équation d'équilibre

$$(59) \qquad 2\pi(e_1 - e_2) = \int_S \frac{(e'_1 + e'_2)\cos(r, n)}{r^2}\, dS' + \mathop{\mathrm{S}}_1^p q_i \frac{\cos(r_i, n)}{r_i^2}.$$

Cette équation, dont tout le second membre est connu en vertu des hypothèses, détermine la différence cherchée $e_1 - e_2$. Le problème s'achève donc par une quadrature double.

En faisant $e_2 = 0$, on retrouve l'équation fonctionnelle qui caractérise les conducteurs fermés.

Voici les conséquences les plus immédiates de la formule (59) :

1° Elle donne une limite supérieure de l'ordre d'infinitude de la densité sur les bords. En effet, la différence $e_1 - e_2$ doit être

finie, au moins à une certaine distance du contour. Pour qu'il en soit ainsi, il est aisé de voir que la condition suivante doit être remplie : soient M, M', M'_0 trois points du conducteur situés, le premier à distance finie du bord, le second à distance infiniment petite du bord, le troisième sur le bord même au pied de la perpendiculaire abaissée du second sur le contour; si l'on pose $MM' = r$, $MM'_0 = r_0$, $M'M'_0 = \delta$, la somme $e'_1 + e'_2$, infiniment grande en M', doit être d'un ordre inférieur à celui de $\frac{1}{r_0 - r}$, c'est-à-dire à celui de $\frac{1}{\delta}$. On en conclut facilement que la charge ne peut s'accumuler en quantité finie sur le contour, bien que la densité y soit infinie. Tous les exemples connus prouvent que, près des bords, la densité est du même ordre que $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$.

2° Si le conducteur est convexe et soustrait à toute influence, la densité électrique est plus forte en tout point de la face externe qu'au point correspondant de la face interne; car, en vertu de la convexité supposée, tous les éléments qui entrent dans l'intégrale de la formule (59) sont positifs. De là résulte que la charge externe est plus grande que la charge interne.

II. — Répartition de la charge entre les deux faces.

Cette dernière propriété appartient à un grand nombre de conducteurs non convexes. Imaginons une surface ouverte S, limitée par un contour fermé K. Soit ω l'angle solide sous lequel on voit le contour K d'un point quelconque de l'espace. Concevons la surface limitée lieu des points $\omega = 2\pi$ et la surface illimitée lieu des points $\omega = 0$, qui se raccordent le long de K, et supposons que S ne coupe ni l'une ni l'autre de ces surfaces.

La surface conductrice S peut être regardée comme la limite d'un conducteur extrêmement mince, dont la face extérieure S_1 et la face intérieure S_2 se coupent suivant l'arête saillante K. Soient $\mu = e\,dS$, $\mu' = e'\,dS$ deux éléments électriques correspondants de S_1 et de S_2. D'après un théorème de Gauss, les sommes des composantes normales des répulsions exercées sur S par ces deux éléments ont respectivement pour valeurs $\mu\omega$ et $-\mu'(4\pi - \omega)$.

Quant aux éléments situés sur l'arête vive, dont l'action serait facile à évaluer, il est inutile de s'en préoccuper, car nous venons de montrer que leur totalité ne représente pas une quantité finie d'électricité. En exprimant que les composantes normales des répulsions exercées sur la surface S, intérieure au conducteur mince, par toute l'électricité répandue sur les faces S_1, S_2 ont une somme égale à o, on a

$$(60) \qquad \mathbf{S}\, \mu\omega = \mathbf{S}\, \mu'(4\pi - \omega).$$

Désignons par m la charge externe, par m' la charge interne, par M la charge totale, par ω_1 le maximum et par ω_2 le minimum de ω. L'égalité (60) donne lieu aux deux inégalités

$$(61) \qquad m\omega_1 > m'(4\pi - \omega_1), \qquad m\omega_2 < m'(4\pi - \omega_2),$$

d'où

$$(62) \qquad \frac{\omega_2}{4\pi} < \frac{m'}{M} < \frac{\omega_1}{4\pi}.$$

Il en résulte $m > m'$. On reconnaît aisément que cette conclusion s'applique *a fortiori* à tout conducteur S qui couperait la surface $\omega = 0$, sans couper la surface $\omega = 2\pi$.

Comme première application des formules précédentes, proposons-nous de déterminer deux limites inférieure et supérieure du rapport $\frac{m'}{M}$ pour une calotte conductrice résultant de la section d'un ellipsoïde de révolution allongé par le plan d'un parallèle. Soient α l'angle du plan de base avec le plan tangent tout le long du contour, β le demi-angle au sommet du cône de révolution sous lequel le contour est vu du sommet de la calotte. Les angles solides correspondants sont 2α et $2\pi(1 - \cos\beta)$. Des considérations géométriques assez simples montrent que ce sont là le maximum et le minimum désignés par ω_1 et ω_2. La formule (62) donne alors

$$(63) \qquad \frac{1 - \cos\beta}{2} < \frac{m'}{M} < \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Comme deuxième application, cherchons à construire, sur un contour donné K, une surface conductrice S pour laquelle le rap-

port $\frac{m'}{M}$ ait une valeur donnée λ, plus petite que $\frac{1}{2}$. L'équation (60) montre qu'il suffit de prendre pour S le lieu des points d'où l'on voit le contour K sous l'angle constant $4\pi\lambda$. En particulier, si l'on veut que la charge interne soit égale à la charge externe, l'angle en question sera égal à 2π.

Si sur le contour K on construit, en dessus, la surface $\omega = 4\pi\lambda$ et, en dessous, la surface complémentaire $\omega = 2\pi - 4\pi\lambda$, ces deux surfaces se raccordent; et, si l'on appelle m'' la charge répandue sur la seconde, la charge totale conservant la même valeur M que précédemment, on trouve, en exprimant que la somme des composantes normales des répulsions électriques est nulle sur toute surface intérieure au conducteur fermé et s'appuyant sur le contour K,

$$\frac{m''}{M} = 2\lambda,$$

d'où l'on conclut, puisque $\frac{m'}{M} = \lambda$,

$$m' = \frac{m''}{2}. \tag{64}$$

Si donc on supprime le segment inférieur et qu'on restitue la charge de ce segment au segment supérieur, cette charge se partage en deux parties égales entre les deux faces du segment conservé.

Cette propriété appartient à toute surface fermée percée de très petites ouvertures de forme quelconque et en nombre quelconque p. Supposons d'abord la surface intacte. En appelant m''_i la charge portée par la $i^{\text{ième}}$ calotte, non encore supprimée, et ω_i l'angle sous lequel on voit cette calotte d'un point quelconque de la surface portant la charge μ, on trouve, par des considérations analogues à celles dont nous venons de faire usage,

$$\sum_1^p \mathrm{S}\,\mu\omega_i = 2\pi \sum_1^p m''_i. \tag{65}$$

Supprimons maintenant toutes les calottes et conservons la même charge totale : l'élément électrique, qui était μ en un point extérieur, devient $\mu(1+\varepsilon)$; à l'intérieur, de o il devient μ', et

l'on aura

$$\sum_1^p \mathrm{S}(\mu + \varepsilon\mu)\omega_i = \sum_1^p \mathrm{S}\,\mu'(4\pi - \omega_i)$$

ou

$$\sum_1^p \mathrm{S}\,\mu\omega_i = 4\pi \sum_1^p m'_i - \sum_1^p \mathrm{S}(\varepsilon\mu + \mu')\omega_i.$$

On doit admettre que $\varepsilon\mu$ et μ' sont du même ordre de grandeur (pour la sphère, comme nous le verrons, on a $\varepsilon\mu = -\mu'$); il en résulte, ω_i étant infiniment petit, que dans l'équation précédente le second terme du deuxième membre est négligeable vis-à-vis du premier :

$$(66) \qquad \sum_1^p \mathrm{S}\,\mu\omega_i = 4\pi \sum_1^p m'_i.$$

La comparaison entre (65) et (66) donne

$$(67) \qquad \sum_1^p m'_i = \frac{1}{2} \sum_1^p m''_i. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Les principes que nous établirons plus tard permettent d'affirmer que la distribution électrique sur une surface percée d'ouvertures très petites en nombre quelconque résulte de la superposition des distributions sur cette même surface percée d'une ouverture seulement : on a donc séparément

$$m'_i = \frac{1}{2} m''_i.$$

On peut vérifier ce résultat, par un calcul direct, sur une sphère percée d'une petite ouverture circulaire, en prenant pour point de départ l'expression de la densité électrique sur la calotte sphérique donnée par Sir W. Thomson [1]. On reconnaîtra de plus que la charge intérieure se concentre presque tout entière sur les bords de la petite ouverture, de sorte que le plan d'épreuve, introduit à l'intérieur de la sphère creuse, ne révélera aucune trace d'électricité.

(1) *Reprint*, p. 185; 1872.

III. — Conducteurs ouverts de forme sphérique. Disques plans.

Revenons à l'équation fondamentale (59) et appliquons-la à un conducteur formé par une portion de surface sphérique limitée par un ou plusieurs contours de forme quelconque. Nous nous dispenserons de développer les calculs, parce qu'ils sont de tout point semblables à ceux que nous avons effectués dans la première Partie (Chap. I, § II) pour déterminer l'influence d'un point électrisé sur une sphère complète.

Soient V le potentiel du conducteur ouvert; f le diamètre de la sphère dont il fait partie; en le supposant soustrait à toute influence, on trouve

$$e_1 - e_2 = \frac{V}{2\pi f}. \tag{68}$$

Donc, sur un conducteur sphérique isolé, la densité électrique en un point quelconque de la face externe surpasse la densité au point opposé de la face interne d'une quantité constante.

Cette propriété subsiste pour un nombre quelconque de conducteurs ouverts appartenant géométriquement à la même sphère; il suffit, dans la formule (68), de remplacer V par la somme ΣV de leurs potentiels : on voit que l'excès $e_1 - e_2$ est le même pour tous les conducteurs, quels que soient leurs potentiels respectifs ([1]).

Considérons maintenant un conducteur sphérique soumis à l'influence d'un point électrisé de charge q_1, dont la puissance par rapport à la sphère de diamètre f sera désignée par p_1. L'équation (59) donne

$$e_1 - e_2 = \frac{V}{2\pi f} - \frac{q_1 p_1}{2\pi f r_1^3}. \tag{69}$$

L'excès $e_1 - e_2$ est égal à la densité de la distribution qui serait induite par le point électrisé sur la sphère complète, supposée au

([1]) Ce théorème, ainsi énoncé, est inexact : la différence entre les densités externe et interne est bien constante pour chaque conducteur, mais elle change d'un conducteur à l'autre; elle est la même que si chaque conducteur était seul avec le potentiel particulier qu'il a dans le système. (*Correction de l'auteur.*)

même potentiel que le conducteur ouvert. Si le point électrisé est situé sur la portion de la sphère laissée vide par le conducteur et que ce conducteur communique avec le sol ($V = 0$), la densité est la même aux points en regard des deux faces. S'il y a en présence plusieurs conducteurs appartenant à la même sphère, il suffira, dans la formule (69), de remplacer V par ΣV.

Du cas d'un conducteur sphérique on passe à celui d'un disque plan en faisant

$$f = \infty, \qquad p_1 = \infty, \qquad \lim \frac{p_1}{f} = h_1,$$

h_1 désignant la distance du point électrisé au plan du disque. On obtient ainsi

$$(70) \qquad e_1 - e_2 = -\frac{q_1 h_1}{2\pi r_1^3}.$$

IV. — Influence de masses fixes sur les conducteurs ouverts. Réduction du problème de la distribution électrique.

Nous avons signalé dans l'Introduction la difficulté presque toujours insurmontable du problème *complet* de l'équilibre électrique d'un conducteur, problème qui consiste à déterminer la distribution de l'électricité pour toutes les positions possibles des masses inductrices. La difficulté dont nous parlons peut être notablement réduite dans le cas très étendu que voici.

Le conducteur ouvert S est un fragment d'une surface conductrice fermée Σ, pour laquelle le problème de la distribution électrique a été, par hypothèse, résolu *complètement*. Il s'agit de déterminer l'influence sur S d'une masse électrique occupant dans l'espace une position *quelconque*. Nous allons montrer que cette influence peut être calculée au moyen d'une quadrature, quand on connaît seulement l'action sur le conducteur S d'un point courant du fragment S' complémentaire de S ($S + S' = \Sigma$).

Soit en effet ε la densité *connue* de la distribution induite par les masses données en un point M de la surface fermée Σ, supposée au potentiel V. Prenons ce point M sur la région S'. On connaît par hypothèse la distribution induite par l'élément électrique $-\varepsilon dS'$ sur le conducteur S, supposé au potentiel zéro. En vertu

du principe de la superposition des influences, on peut en conclure, par intégration, la distribution e appelée sur S par la charge totale $-\int_{S'} \varepsilon\, dS'$ du fragment complémentaire S'. Répandons maintenant sur toute la surface Σ une charge de densité $+\varepsilon$. La région S' est ramenée à l'état neutre, et le conducteur S se trouve en équilibre électrique, avec la densité $e+\varepsilon$ et le potentiel V, sous l'action de la masse donnée. Il ne reste plus qu'à répartir la couche $e+\varepsilon$ entre les deux faces, conformément à la formule (59).

S'il n'y a pas de masse inductrice, la méthode indiquée donne la distribution électrique de potentiel V en équilibre d'elle-même sur le conducteur S.

Comparons maintenant la valeur des densités électriques au même point du conducteur complet Σ et du conducteur ouvert S, pour un même potentiel V. Sur Σ la densité est ε; sur S, $e+\varepsilon$: elle est plus forte sur S que sur Σ.

L'inverse a lieu pour les charges :

Charge de Σ :

$$\int_\Sigma \varepsilon\, d\Sigma = \int_S \varepsilon\, dS + \int_{S'} \varepsilon\, dS';$$

charge de S :

$$\int_S (e+\varepsilon)\, dS = \int_S \varepsilon\, dS + \int_S e\, dS.$$

Or la charge $\int_S e\, dS$, induite sur S par la charge $-\int_{S'} \varepsilon\, dS'$ répandue sur S', est plus petite que cette dernière en valeur absolue. Si donc on détache un fragment d'une surface conductrice fermée et qu'on maintienne le fragment conservé au même potentiel, la charge se trouve diminuée.

CHAPITRE II.

SURFACES CONDUCTRICES A CONTOUR MULTIPLE.

I. — Réduction au cas des conducteurs à contour simple.

Nous arrivons à la réduction importante dont il a été parlé dans l'Introduction, et qui ramène l'équilibre électrique des surfaces conductrices à contour multiple à celui des surfaces à contour simple. Pour abréger, nous appellerons *calotte* toute surface ouverte à contour simple, *zone* toute surface ouverte à double contour, que les bords soient des lignes planes ou gauches.

Je rappelle qu'un point électrisé induit sur un conducteur au potentiel zéro une distribution dont la densité a partout le même signe; ce signe est contraire à celui de la charge du point. Ceci nous permettra, dans ce qui va suivre, de mettre en évidence le signe des densités. Dorénavant, quand nous parlerons de l'influence d'un point électrisé sur un conducteur, il sera sous-entendu que ce conducteur est au potentiel zéro.

Considérons une surface fermée Σ divisée en trois parties : deux calottes C et C'et une zone B. Nous pouvons, d'ailleurs, concevoir d'autres divisions de la surface Σ; supposons-la doublement connexe, ayant la forme d'un tore. Coupons-la par deux plans, dont l'un détache une calotte C, l'autre un tube courbé à double contour C'; la partie restante B est une surface tronquée à triple contour. Les raisonnements subséquents s'appliquent aux fragments C, C', B, tels qu'ils viennent d'être définis.

Supposons que l'on connaisse : 1° la distribution électrique sur la surface Σ, soustraite à toute influence; 2° l'influence sur la calotte $B+C$ d'un point électrisé occupant successivement toutes les positions possibles sur la calotte C' complémentaire de $B+C$; 3° l'influence sur $B+C'$ d'un point courant de C. De ces données on peut, comme on va voir, conclure la distribution électrique en équilibre d'elle-même sur la zone B.

Soit e la densité électrique en un point de Σ pour un potentiel

égal à V. Répandons sur C et C′ une couche de densité $-e$. La couche $-e$ répandue sur C′ induit sur B + C une couche dont nous désignerons la densité (¹) par β_1 en un point de B, et par γ_1 en un point de C. La couche répandue sur C appelle sur B + C′ une distribution de densité β'_1 en un point de B, γ'_1 en un point de C′. Par hypothèse, on sait calculer, et cela au moyen d'une intégration, β_1, γ_1, β'_1, γ'_1. Distribuons enfin sur Σ une couche de densité $+e$. La superposition de ces divers états d'équilibre donne le résultat suivant : la zone B est en équilibre électrique, avec la densité $e + \beta_1 + \beta'_1$ et le potentiel V, sous l'influence des couches γ_1 et γ'_1 répandues sur C et sur C′.

Une couche de densité $-\gamma'_1$ répandue sur C induirait sur B + C une distribution β_2, γ_2; une couche $-\gamma_1$ répandue sur C induirait sur B + C′ une distribution β'_2, γ'_2, que l'on sait calculer. Superposons ces nouveaux équilibres au précédent : la zone B est alors en équilibre électrique, avec la densité $e + \beta_1 + \beta'_1 + \beta_2 + \beta'_2$ et le potentiel V, sous l'influence des couches γ_2 et γ'_2 répandues respectivement sur C et sur C′.

Continuons de cette manière indéfiniment. Les couches qui, après la $n^{\text{ième}}$ opération, restent sur C et sur C′ ont des densités γ_n, γ'_n qui tendent vers zéro, comme nous l'allons prouver.

En vertu d'une propriété bien connue, la charge $-C'_{n-1}$, qui réside sur C après la $(n-1)^{\text{ième}}$ superposition, induit sur B + C une charge totale $B_n + C_n$ plus petite que C'_{n-1}. On a, par suite, les deux séries d'inégalités

$$\begin{array}{ll} B_1 + C_1 < C'_0, & B'_1 + C'_1 < C_0, \\ B_2 + C_2 < C'_1, & B'_2 + C'_2 < C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_n + C_n < C'_{n-1}, & B'_n + C'_n < C_{n-1}, \end{array}$$

que l'on peut écrire

$$\begin{array}{ll} B_1 + C_1 < C'_0, & B'_1 + C'_1 < C_0, \\ B'_2 + C'_2 < C_1, & B_2 + C_2 < C'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B'_n + C'_n < C_{n-1}, & B_n + C_n < C'_{n-1}. \end{array}$$

(¹) Ou plutôt la somme des densités en deux points opposés des deux faces externe et interne du conducteur. C'est en ce sens qu'il faut entendre le mot *densité* dans tout ce qui va suivre.

On en déduit d'abord, en supposant n pair pour fixer les idées,

$$C_0 > C'_1 > C_2 > \ldots > C_n,$$
$$C'_0 > C_1 > C'_2 > \ldots > C'_n;$$

d'où l'on conclut que les différences $C_0 - C_n$, $C'_0 - C'_n$ sont positives et finies. On en déduit ensuite, par voie d'addition,

$$(71) \qquad B_1 + B'_1 + B_2 + B'_2 + \ldots + B_n + B'_n < C_0 - C_n + C'_0 - C'_n,$$

ce qui montre que la série $\sum_1^\infty (B_n + B'_n)$ est convergente. Il en est de même *a fortiori* des deux séries $\sum_1^\infty B_n$ et $\sum_1^\infty B'_n$. Donc B_n et B'_n tendent vers zéro.

Remarquons maintenant que la charge $-C'_{n-1}$ induit sur l'ensemble de la zone B et de la calotte C la charge totale $B_n + C_n$.

Si C_n ne tendait pas vers zéro, le conducteur continu $B + C$ serait en équilibre électrique avec une charge différente de zéro sur la région C et une charge nulle sur la région B, ce qui est impossible ([1]).

Ce qui est vrai des charges l'est évidemment des densités : γ_n et γ'_n tendent vers zéro; les séries $\sum_1^\infty \beta_n$ et $\sum_1^\infty \beta'_n$ sont convergentes.

On peut observer en passant que, si dans l'inégalité (71) on fait $n = \infty$, et qu'on ajoute aux deux membres B_0, charge de la zone correspondant à la distribution de densité e, on aura

$$(72) \qquad B_0 + B_1 + B'_1 + B_2 + B'_2 + \ldots < B_0 + C_0 + C'_0,$$

c'est-à-dire que, pour un même potentiel V, la charge de la zone B est inférieure à celle de la surface fermée Σ dont cette zone a été détachée (théorème déjà démontré).

([1]) Car le potentiel, nul sur le conducteur $B + C$ (où il est maximum), est négatif en dehors. En passant par la région B, supposée sans charge aucune, il se continuerait sans discontinuité pour aucune de ses dérivées. Dès lors, si d'un point de B comme centre on décrit une petite sphère, la valeur du potentiel au centre, moyenne entre les valeurs aux divers points de la surface sphérique, serait négative.

De ce qui précède nous concluons que la zone B est d'elle-même en équilibre électrique, au potentiel V, avec la densité

$$e + \beta_1 + \beta'_1 + \beta_2 + \beta'_2 + \ldots + \beta_n + \beta'_n + \ldots \tag{73}$$

Il ne reste plus qu'à répartir la distribution trouvée entre les deux faces de la zone. Il sera bon de faire ce départ pour les couches successives que représentent les termes de la série (73).

On peut, d'après les mêmes principes, déterminer l'influence sur la zone B d'un point électrisé de charge q situé sur l'une des calottes C ou C', sur C' par exemple. Ce point appelle sur B + C une distribution de densité $-b_1$, $-c_1$. La couche b_1 répandue sur C induirait sur B + C' une couche de densité $-b'_2$, $-c'_2$. La couche b'_1 répandue sur C' induirait sur B + C une couche de densité $-b_2$, $-c_2$, et ainsi de suite. Un raisonnement calqué sur celui du cas précédent prouverait que la zone B est en équilibre électrique, au potentiel zéro, avec la densité

$$-(b_1 + b'_1 + b_2 + b'_2 + \ldots),$$

sous l'influence de la charge q concentrée au point considéré de la calotte C'.

Si maintenant on connaît l'influence sur la surface fermée Σ d'un point électrisé situé d'une manière quelconque dans l'espace, on pourra, du résultat qui précède et d'un théorème démontré précédemment (Chap. I, § III), déduire l'influence du même point sur la zone B. Le problème *complet* de la distribution électrique sera résolu pour cette zone ([1]).

Considérons enfin une surface conductrice B à n contours; elle résulte d'une surface fermée Σ par l'ablation de n calottes C, C', C'', ..., $C^{(n-1)}$. Supposons que l'on connaisse : 1° la distribution électrique en équilibre sur Σ; 2° l'influence d'un point quelconque de l'une des calottes C, C', C'', ..., $C^{(n-1)}$ sur le conducteur ob-

---

([1]) Le mode de démonstration employé donnera directement le potentiel électrique de la zone B en un point quelconque de l'espace, connaissant les potentiels au même point de la surface Σ et des calottes B + C, B + C', influencées chacune par un point courant des calottes complémentaires C' et C. Nous signalons ce résultat, qui peut trouver son application dans plus d'une branche de la Physique mathématique. (*Note tirée d'une première rédaction.*)

tenu en détachant de Σ cette seule calotte; on pourra résoudre le problème de l'équilibre électrique du conducteur à n contours B. Il n'y a pas lieu d'insister sur cette facile généralisation.

Ainsi s'opère la réduction que nous avions en vue. Un contour de plus dans la surface du conducteur amène deux séries infinies de quadratures à effectuer. On conçoit alors combien la solution du problème de la distribution de l'électricité sur une zone sphérique doit être compliquée, comparée à la solution si simple que Sir W. Thomson a donnée du même problème pour la calotte sphérique. Dans le passage de la calotte à la zone, les difficultés se multiplient dans la même mesure que lorsqu'on passe d'une sphère unique à deux sphères électrisées.

Nous avons vu que, pour un conducteur sphérique de diamètre f au potentiel V, la différence entre les densités externe et interne est constante et égale à $\frac{V}{2\pi f}$; il en résulte les expressions suivantes de ces densités :

Densité extérieure :

$$\frac{V}{2\pi f} + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(\beta_n - \beta'_n);$$

densité intérieure :

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(\beta_n - \beta'_n).$$

Sir W. Thomson a déterminé l'influence sur une calotte sphérique d'un point électrisé situé sur la calotte complémentaire. On peut donc aborder le problème de la distribution électrique sur une sphère percée d'ouvertures circulaires en nombre quelconque, et en particulier sur une zone proprement dite.

CHAPITRE III.

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ SUR UNE ZONE SPHÉRIQUE.

I. — Formules de résolution.

Coupons la figure par un plan méridien. La base supérieure de la zone a pour trace sur ce plan la corde AB et la base inférieure la corde A′B′. Soient C, C′ les pôles supérieur et inférieur des deux cercles de base. La zone AA′B′B est obtenue en détachant de la sphère les deux calottes CAB, C′A′B′.

Soient :

P un point de la zone;
Q un point de la première calotte;
Q′ un point de la seconde.

Posons

$CA = a$,	$CA = a'$,	$CP = r$,
$C'A = a$,	$C'A' = a'$,	$C'P' = r'$,
$CQ = q$,	$C'Q' = q'$,	$CC' = f$.

Pour appliquer la théorie qui vient d'être exposée, il faut connaître la densité de la distribution appelée par un élément électrique situé au point Q de la calotte CAB sur la calotte complémentaire C′AB, supposée au potentiel zéro.

Si l'on appelle ψ l'angle des deux plans méridiens CPC′, CQC′, l'élément de surface au point Q a pour expression $q\,dq\,d\psi$. La densité de la distribution induite par la charge élémentaire $hq\,dq\,d\psi$ est la même sur les deux faces de la calotte CAB, en un point quelconque P; elle a pour expression (si on la double, afin d'ajouter les charges des deux faces)

$$\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{a^2-q^2}{r^2-a^2}}\,\frac{hq\,dq\,d\psi}{\overline{QP}^2}, \tag{74}$$

(*voir* Thomson, *Reprint*, p. 183; 1872). Si l'on remplace $\overline{QP}^2$ par

sa valeur en fonction de r, q, ψ et qu'on intègre par rapport à ψ de 0 à 2π, on aura la densité induite au point P par une charge uniforme répandue sur tout le parallèle Q, savoir

$$\frac{h}{\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\frac{\sqrt{a^2-q^2}}{r^2-q^2}\,d(q^2). \tag{75}$$

Cela posé, une couche de densité γ_m répandue sur la calotte CAB induira au point P de la calotte C'AB la densité

$$\beta'_{m+1}=\int_0^{a^2}\frac{\gamma_m}{\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\frac{\sqrt{a^2-q^2}}{r^2-q^2}\,d(q^2), \tag{76}$$

et, au point Q' de la même calotte, une densité que l'on trouve facilement égale à

$$\gamma'_{m+1}=\int_0^{a^2}\frac{\gamma_m}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{a}^2-q'^2}}\frac{\sqrt{a^2-q^2}}{f^2-q^2-q'^2}\,d(q^2). \tag{77}$$

Posons, pour simplifier,

$$\left\{\begin{array}{lll} a^2=\alpha, & a^2-q^2=x, & r^2-a^2=y,\\ a'^2=\alpha', & a'^2-q'^2=x', & r'^2-a'^2=y',\\ \multicolumn{3}{l}{\mathrm{a}^2-a'^2=\mathrm{a}'^2-a^2=f^2-a^2-a'^2=1;}\end{array}\right. \tag{78}$$

d'où

$$r^2-q^2=x+y,\qquad \mathrm{a}'^2-q^2=1+x,$$
$$r'^2-q'^2=x'+y',\qquad \mathrm{a}^2-q'^2=1+x',$$
$$f^2-q^2-q'^2=1+x+x'.$$

On aura, pour résoudre le problème, les formules

$$\left\{\begin{array}{l} \beta'_{m+1}=\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{\gamma_m}{\pi}\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\sqrt{x}}{y+x}\,dx,\\ \beta_{m+1}=\displaystyle\int_0^{\alpha'}\frac{\gamma'_m}{\pi}\frac{1}{\sqrt{y'}}\frac{\sqrt{x'}}{y'+x'}\,dx',\end{array}\right. \tag{79}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma'_{m+1}=\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{\gamma_m}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+x'}}\frac{\sqrt{x}}{1+x+x'}\,dx,\\ \gamma_{m+1}=\displaystyle\int_0^{\alpha'}\frac{\gamma'_m}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\frac{\sqrt{x'}}{1+x+x'}\,dx',\end{array}\right. \tag{80}$$

auxquelles il faut adjoindre celles-ci

$$(81)\qquad \gamma_0 = \gamma'_0 = e = \frac{V}{2\pi f}.$$

Les limites des quantités x, x', y, y' sont données par le Tableau :

$$(82)\qquad \begin{cases} 0 \leqq x \leqq \alpha, & 0 \leqq y \leqq 1, \\ 0 \leqq x' \leqq \alpha', & 0 \leqq y' \leqq 1. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous supposerons α et α' plus petits que l'unité, c'est-à-dire la zone plus grande que l'une et l'autre des calottes CAB, C'A'B'. A cette condition, les développements en série auxquels nous allons parvenir seront convergents.

II. — Calcul de γ'_{m+1}.

Le problème consiste à déterminer β'_m et β_m ; mais il convient d'abord de chercher la forme des inconnues auxiliaires γ'_m, γ_m, qui ne deviennent jamais infinies. Nous allons voir que ces inconnues sont développables en séries triples ordonnées suivant les puissances entières de x (ou x'), $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha'}$. Ces trois quantités sont plus petites que 1 ; si nous appelons *ordre d'un terme* la somme des exposants de x, α, α' dans ce terme, nous reconnaîtrons que le premier terme de γ_m est de l'ordre $m + \frac{m}{2}$; c'est, à un facteur numérique près,

$$(83)\qquad \begin{cases} A_m = \alpha^{\frac{m}{2}} \alpha'^{\frac{m}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m}{2}} \alpha'^{\frac{m}{2}}} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ A_m = \alpha^{\frac{m-1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m-1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}}} & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Posons donc

$$(84)\qquad \gamma_m = \frac{e}{\pi m} A_m \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda')\, x^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'},$$

et cherchons si γ'_{m+1} est susceptible d'une expression de la même

forme

$$(85)\qquad \gamma'_{m+1} = \frac{e}{\pi^{m+1}} A'_{m+1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda') x'^{\nu} \alpha^{\lambda} \alpha'^{\lambda'},$$

$$(86)\qquad A'_{m+1} = A_m \alpha \sqrt{\alpha} = \begin{cases} \alpha^{\frac{m}{2}+1} \alpha'^{\frac{m}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m}{2}+1} \alpha'^{\frac{m}{2}}} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \alpha^{\frac{m+1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m+1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}}} & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer le coefficient numérique Φ'_{m+1} en fonction de Φ_m. On peut remarquer qu'en vertu de la symétrie entre α et α' on a l'égalité

$$(87)\qquad \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') = \Phi'_m(\nu, \lambda', \lambda).$$

Notre analyse montrera que $\Phi_m(\nu, \lambda, \lambda')$ est une fonction rationnelle des arguments entiers ν, λ, λ'.

Pour calculer Φ'_{m+1} revenons à la formule

$$(80)\qquad \gamma'_{m+1} = \int_0^{\alpha} \frac{\gamma_m}{\pi} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x'}(1+x+x')} dx.$$

Si l'on développe $\frac{1}{1+x+x'}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-x'}}$ suivant les puissances croissantes de x', le terme de degré $i-1$ dans le premier développement et le terme de degré $\nu-i+1$ dans le second seront respectivement

$$(88)\qquad (-1)^{i-1} \frac{x'^{i-1}}{(1+x)^i}, \qquad (-1)^{\nu-i+1} \frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)} \frac{x'^{\nu-i+1}}{2^{\nu-i+1}}.$$

On a donc, en convenant que $\frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)} = 1$ pour $i = \nu+1$,

$$(89)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x'}(1+x+x')} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} x'^{\nu} \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)} \frac{(1+x)^{-i}}{2^{\nu-i+1}};$$

et pour toutes les valeurs de x', qui, d'après les hypothèses, sont comprises entre 0 et 1, cette série est absolument convergente, comme les deux séries dont elle est le produit.

La substitution de la série (89) dans l'expression (80) donne

$$(90)\quad \gamma'_{m+1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} x'^{\nu} \int_0^{\alpha} \frac{\gamma_m}{\pi} \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)} \frac{(1+x)^{-i}}{2^{\nu-i+1}} \sqrt{x}\,dx.$$

En développant $(1+x)^{-i}$, on obtient une série absolument convergente entre $x=0$ et $x=1$, et dont le terme de degré j est

$$(-1)^j \frac{i(i+1)\ldots(i+j-1)}{1.2\ldots j} x^j.$$

Si donc on pose

$$(91)\quad \psi(\nu,j) = \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \frac{i(i+1)\ldots(i+j-1)}{1.2\ldots j} \frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)} \frac{(-1)^j}{2^{\nu-i+1}},$$

en convenant que, pour $j=0$, $\frac{i(i+1)\ldots(i+j-1)}{1.2\ldots i} = 1$, on aura

$$(92)\qquad \gamma'_{m+1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^{\nu} x'^{\nu} \int_0^{\alpha} \frac{\gamma_m}{\pi} \sum_{j=0}^{j=\infty} \psi(\nu,j)\, x^j \sqrt{x}\,dx.$$

Nous avons supposé γ_m exprimable par une série triple de la forme (84). Cette série se réduit, pour γ_0, au seul terme constant $e = \frac{V}{2\pi f}$, en vertu de la condition (81). Les transformations que nous allons faire subir au second membre de l'expression (92) amèneront alors pour γ'_1 une série absolument convergente, comme on pourra s'en convaincre en suivant les opérations une à une. Il en sera de même pour γ_1 ; la série γ_1 étant absolument convergente, les mêmes transformations donneront pour γ'_2 une série absolument convergente, et ainsi de suite.

Prenons dans γ_m le terme $\frac{e}{\pi^m} A_m \Phi_m(n, l, l') x^n \alpha^l \alpha'^{l'}$, et dans l'expression de γ'_{m+1} mettons en évidence sous le signe $\int$ le terme

$$\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \Phi_m(n, l, l') \psi(\nu, j) x^{n+j} \alpha^l \alpha'^{l'}.$$

Faisons

$$n+j=k,$$

d'où

$$n = k-j \qquad (j=0, 1, 2, \ldots, k)$$

le terme en $x^k \alpha^l \alpha'^{l'}$ sera

$$\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \chi(\nu, l, l', k)\, x^k \alpha^l \alpha'^{l'},$$

si l'on pose

$$(93) \qquad \chi(\nu, l, l', k) = \sum_{j=0}^{j=k} \Phi_m(k-j, l, l')\, \psi(\nu, j).$$

L'intégration donne

$$\int_0^\alpha \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \chi(\nu, l, l', k)\, x^k \alpha^l \alpha'^{l'} \sqrt{x}\, dx$$
$$= \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \sqrt{\alpha}\, \frac{2}{2k+3}\, \chi(\nu, l, l', k)\, \alpha^{k+l+1} \alpha'^{l'}.$$

Faisons

$$l' = \lambda', \qquad k + l = \lambda,$$

d'où

$$l = \lambda - k \qquad (k = 0, 1, \ldots, \lambda);$$

le terme en $\alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}$ sera

$$\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \alpha \sqrt{\alpha} \sum_{k=0}^{k=\lambda} \frac{2}{2k+3}\, \chi(\nu, \lambda - k, \lambda', k)\, \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'};$$

et si l'on pose

$$(94) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A_m \alpha \sqrt{\alpha} = A'_{m+1}, \\ & \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda') = (-1)^\nu \sum_{k=0}^{k=\lambda} \frac{2}{2k+3}\, \chi(\nu, \lambda - k, \lambda', k), \end{aligned} \right.$$

on trouve finalement, comme nous l'avons annoncé,

$$(95) \qquad \gamma_{m+1} = \frac{e}{\pi^{m+1}} A'_{m+1} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda')\, x'^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}.$$

Si, dans la formule (94), on remplace les symboles ψ et χ par leurs valeurs (91) et (93), on aura

$$(96) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda') = (-1)^\nu & \sum_{k=0}^{k=\lambda} \sum_{j=0}^{j=k} \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \frac{\Phi_m(k-j, \lambda - k, \lambda')}{2k+3} \\ & \times \frac{i(i+1)\ldots(i+j-1)}{1.2\ldots j}\, \frac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)}\, \frac{(-1)^j}{2^{\nu-i}}. \end{aligned} \right.$$

Comme γ'_0 se réduit à la constante e, il en résulte

$$\Phi'_0(\nu, \lambda, \lambda') = 0$$

pour toutes les valeurs des arguments, sauf pour le système

$$\nu = \lambda = \lambda' = 0,$$

qui donne

$$\Phi'_0(0, 0, 0) = 1.$$

On voit alors que $\Phi'_{m+1}(\nu, \lambda, \lambda')$ est une fonction rationnelle des arguments entiers ν, λ, λ'.

III. — Calcul de β'_{m+1}.

Arrivons enfin au calcul de

$$(79) \qquad \beta'_{m+1} = \int_0^\alpha \frac{\gamma_m}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\sqrt{x}}{y + x} dx.$$

Dans le développement de γ_m, prenons le terme

$$\frac{e}{\pi^m} A_m \Phi_m(n, l, l') x^n \alpha^l \alpha'^{l'},$$

et effectuons la division

$$(97) \left\{ \begin{aligned} \frac{x^n}{x+y} &= x^{n-1} - y x^{n-2} + \ldots + (-1)^{\nu+1} y^{\nu+1} x^{n-\nu-2} + \ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1} y^{n-1} + (-1)^n \frac{y^n}{x+y}. \end{aligned} \right.$$

Il y aura dans l'expression de β'_{m+1} trois sortes de termes de nature analytique différente, suivant qu'ils proviendront de $(-1)^n \frac{y^n}{x+y}$, de x^{n-1}, de $(-1)^{\nu+1} y^{\nu+1} x^{n-\nu-2}$.

1° *Termes qui proviennent de* $(-1)^n \frac{y^n}{x+y}$. — L'intégration donne

$$\begin{aligned} &\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m (-1)^n y^n \Phi_m(n, l, l') \alpha^l \alpha'^{l'} \int_0^\alpha \sqrt{\frac{x}{y}} \frac{dx}{y + x} \\ &= \frac{2e}{\pi^{m+1}} A_m (-1)^n y^n \alpha^l \alpha'^{l'} \Phi_m(n, l, l') \left(\sqrt{\frac{\alpha}{y}} - \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \right). \end{aligned}$$

Le terme en arc tang $\sqrt{\frac{\alpha}{y}}$ fournit à β'_{m+1} la série triple

$$(98)\quad -\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\alpha}{y}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} (-1)^\nu \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') y^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}.$$

Quant aux termes en $\sqrt{\frac{\alpha}{y}}$, nous les séparerons, pour en tenir compte tout à l'heure, en deux catégories, dont la première comprendra les termes correspondant à $n = 0$, savoir

$$(99)\qquad \frac{2e}{\pi^{m+1}} A_m \Phi_m(0, \lambda, \lambda') \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'} \sqrt{\frac{\alpha}{y}},$$

et la seconde les termes correspondant à toutes les valeurs $\nu + 1$ de n autres que zéro, savoir :

$$(100)\qquad \frac{2e}{\pi^{m+1}} A_m (-1)^{\nu+1} y^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'} \Phi_m(\nu+1, \lambda-1, \lambda') \sqrt{\frac{y}{\alpha}}.$$

2° *Termes qui proviennent de x^{n-1}.* — On trouve en intégrant

$$\frac{e}{\pi^{m+1}} \frac{A_m}{\sqrt{y}} \Phi_m(n, l, l') \alpha^l \alpha'^{l'} \int_0^\alpha x^{n-1} \sqrt{x}\, dx$$
$$= \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \frac{2}{2n+1} \Phi_m(n, l, l') \alpha^{n+l} \alpha'^{l'}.$$

Aux termes de cette nature il faut réunir le terme (99) correspondant à $n = 0$. Si l'on pose

$$l' = \lambda', \qquad n + l = \lambda,$$

d'où

$$l = \lambda - n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \lambda)$$

et

$$(101)\qquad F_m(\lambda, \lambda') = \sum_{n=0}^{n=\lambda} \frac{2}{2n+1} \Phi_m(n, \lambda - n, \lambda'),$$

on trouvera dans β'_{m+1} la série double

$$(102)\qquad \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} F_m(\lambda, \lambda') \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}.$$

3° *Termes qui proviennent de* $(-1)^{\nu+1} y^{\nu+1} x^{n-\nu-2}$. — L'intégration donne

$$\frac{e}{\pi^{m+1}} A_m (-1)^{\nu+1} y^\nu \sqrt{y}\, \Phi_m(n, l, l') \alpha^l \alpha'^{l'} \int_0^\alpha x^{n-\nu-2} \sqrt{x}\, dx$$
$$= \frac{e}{\pi^{m+1}} A_m \sqrt{\frac{y}{\alpha}} \frac{2}{2(n-\nu)-1} \Phi_m(n, l, l') y^\nu \alpha^{l+n-\nu} \alpha'^{l'}.$$

Aux termes de cette nature il faut réunir le terme (100) correspondant à $n = \nu + 1$ $\left(\text{le quotient } \frac{x^n}{x+y} \text{ ne peut fournir un terme en } y^{\nu+1} \text{ qu'à partir de } n = \nu + 2\right)$. Si l'on pose

$$l' = \lambda', \qquad l + n - \nu = \lambda,$$

d'où

$$n = \lambda + \nu - l \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, \lambda - 1),$$

et

$$(103) \qquad \Psi_m(\nu, \lambda, \lambda') = (-1)^{\nu+1} \sum_{l=0}^{l=\lambda-1} \frac{2\Phi_m(\lambda + \nu - l, l, \lambda')}{2(\lambda - l) - 1},$$

on aura dans β'_{m+1} la série

$$(104) \qquad \frac{e}{\pi^{m+1}} \sqrt{\frac{y}{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \Psi_m(\nu, \lambda, \lambda') y^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}.$$

IV. — Solution par les séries multiples.

En réunissant les termes de nature diverse qui viennent d'être calculés (98), (102), (104), et en remplaçant e par sa valeur $\frac{V}{2\pi f}$, on trouve finalement

$$(105) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\pi^{m+2} f}{V A_m} \beta'_{m+1} = {} & \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} F_m(\lambda, \lambda') \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'} \\ & + \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{\alpha}{y}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} (-1)^\nu \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') y^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'} \\ & + \sqrt{\frac{y}{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty} \Psi_m(\nu, \lambda, \lambda') y^\nu \alpha^\lambda \alpha'^{\lambda'}. \end{aligned} \right.$$

où les symboles A_m, Φ_m, F_m, Ψ_m ont des significations données par les formules (83), (96), (101), (103), que nous reproduisons :

$$(83)\quad \begin{cases} A_m = \alpha^{\frac{m}{2}} \alpha'^{\frac{m}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m}{2}} \alpha'^{\frac{m}{2}}} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ A_m = \alpha^{\frac{m-1}{2}} \alpha'^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\alpha^{\frac{m}{2}-\frac{1}{2}} \alpha'^{\frac{m-1}{2}}} & \text{si } m \text{ est impair;} \end{cases}$$

$$(101)\qquad F_m(\lambda, \lambda') = \sum_{n=0}^{n=\lambda} \frac{2}{2n+1} \Phi_m(n, \lambda - n, \lambda');$$

$$(103)\qquad \Psi_m(\nu, \lambda, \lambda') = (-1)^{\nu+1} \sum_{l=0}^{l=\lambda-1} \frac{2\Phi_m(\lambda + \nu - l, l, \lambda')}{2(\lambda - l) - 1};$$

$$(96')\quad \begin{cases} \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') = (-1)^\nu \displaystyle\sum_{k=0}^{k=\lambda} \sum_{j=0}^{j=k} \sum_{i=1}^{i=\nu+1} \frac{\Phi'_{m-1}(k-j, \lambda-k, \lambda')}{2k+3} \\ \qquad \times \dfrac{i(i+1)\ldots(i+j-1)}{1.2\ldots j} \, \dfrac{1.3\ldots[2(\nu-i)+1]}{1.2\ldots(\nu-i+1)} \, \dfrac{(-1)^j}{2^{\nu-i}}; \end{cases}$$

$$(106)\quad \Phi_m(\nu, \lambda, \lambda') = \Phi'_m(\nu, \lambda', \lambda), \qquad \Phi_0(\nu, \lambda, \lambda') = 0, \qquad \Phi_0(0, 0, 0) = 1.$$

Les expressions de F_m, Ψ_m, Φ_m montrent que ces coefficients purement numériques sont des fonctions rationnelles des arguments entiers qui y figurent. La valeur de A_m montre que l'ordre de petitesse des fonctions β, β' va chaque fois en croissant d'une unité et demie.

Reportons-nous maintenant aux expressions des densités.

Densité extérieure :

$$\frac{V}{2\pi f} + \frac{1}{2} \sum_1^\infty (\beta_m - \beta'_m);$$

densité intérieure :

$$\frac{1}{2} \sum_1^\infty (\beta_m + \beta'_m).$$

De là résulte, pour la densité intérieure e_i, l'expression

$$(107)\quad \begin{cases} e_i = \dfrac{V}{2\pi^2 f} \Big[S_1(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}) \sqrt{\dfrac{\alpha'}{y'}} + S_2(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y') \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\dfrac{\alpha'}{y'}} + S_3(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y') \sqrt{\dfrac{y'}{\alpha'}} \\ \qquad + S_1(\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha'^{\frac{1}{2}}) \sqrt{\dfrac{\alpha}{y}} + S_2(\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha'^{\frac{1}{2}}, y) \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\dfrac{\alpha}{y}} + S_3(\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha'^{\frac{1}{2}}, y) \sqrt{\dfrac{y}{\alpha}} \Big], \end{cases}$$

où les symboles S_1, S_2, S_3 désignent des séries entières par rapport à leurs arguments $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha'}$, y' ou y. Dans ces séries, les coefficients numériques des termes des différents ordres s'obtiennent par un nombre *limité* d'opérations *rationnelles* faites sur le nombre incommensurable π.

Voici les calculs de ces séries exécutés jusqu'aux termes du quatrième ordre inclusivement :

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned}
S_1\left(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}\right) &= 1 + \frac{2}{3\pi}\alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5\pi}\alpha^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha' + \frac{4}{9\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7\pi}\alpha^{\frac{7}{2}} \\
&\quad + \frac{1}{3\pi}\alpha^{\frac{5}{2}}\alpha' + \frac{1}{4\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^2 - \frac{2}{5\pi^2}\alpha^{\frac{5}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}} - \frac{22}{45\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{5}{2}}, \\
S_2\left(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y\right) &= -1 - \frac{2}{3\pi}\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5\pi}\alpha^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}y' \\
&\quad - \frac{4}{9\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7\pi}\alpha^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{\pi}\alpha^{\frac{5}{2}}y' - \frac{5}{4\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}y'^2 \\
&\quad - \frac{2}{3\pi^2}\alpha^{\frac{5}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{3}{2}}y', \\
S_3\left(\alpha'^{\frac{1}{2}}, \alpha^{\frac{1}{2}}, y'\right) &= \frac{1}{\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha' - \frac{1}{\pi}\alpha^{\frac{5}{2}}\alpha' - \frac{5}{12\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^2 \\
&\quad + \frac{5}{4\pi}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha' y' + \frac{2}{3\pi^2}\alpha^{\frac{3}{2}}\alpha'^{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

En faisant $\alpha = 0$, on retrouve la loi de la distribution électrique sur la calotte sphérique

$$(109)\qquad e_i = \frac{V}{2\pi^2 f}\left(\sqrt{\frac{\alpha'}{y'}} - \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\alpha'}{y'}}\right).$$

C'est, aux notations près, la formule obtenue par Sir W. Thomson (*Reprint*, p. 185; 1872).

TROISIÈME PARTIE (1).

ADDITIONS ET COMPLÉMENTS.

CHAPITRE I.

CONDUCTEURS FERMÉS CONVEXES.

I. — Distribution de l'électricité sur une surface fermée convexe (2).

Considérons une surface fermée convexe σ, n'ayant qu'un plan tangent en chaque point. Joignons un de ses points aux divers éléments $d\sigma'$ par des droites r faisant des angles φ avec la normale intérieure au point en question.

Donnons-nous une fonction *quelconque* f, déterminée et finie en tout point de σ et formons la suite d'intégrales

$$(1) \quad f_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma', \quad f_2 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f_1\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma', \quad \ldots, \quad \textit{ad infin.}$$

On va voir que *f_n tend vers la densité e de la couche électrique en équilibre d'elle-même sur σ.*

Cette densité est déterminée, quand on fixe sa valeur en un point particulier, par l'équation fonctionnelle (3)

$$(2) \qquad e = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{e'\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma'.$$

(1) Cette troisième Partie est formée d'une première Note, publiée par l'auteur, et d'articles extraits de ses manuscrits.

(2) Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIV, p. 1834; 1887.

(3) *Voir* ci-dessus, première Partie, Chapitre I, § I.

Or, on peut écrire

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f}{e}\,\frac{e\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma'.$$

Soient A le maximum, B le minimum du rapport $\frac{f}{e}$, M la moyenne $\frac{A+B}{2}$. Partageons, suivant la méthode de Carl Neumann ([1]), la surface σ en deux groupes de régions, l'un α correspondant aux valeurs de $\frac{f}{e}$ plus grandes que M, l'autre β aux valeurs plus petites que M; s'il y a des plages pour lesquelles $\frac{f}{e}$ est égal à M, on les attribuera indifféremment au premier ou au second groupe.

Comme e a partout le même signe, $+$ par exemple, et que, σ étant convexe, $\cos\varphi$ est toujours positif, on aura les inégalités

$$2\pi f_1 \leqq A\int_\alpha \frac{e\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma' + M\int_\beta \frac{e\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma',$$

$$2\pi f_1 \geqq M\int_\alpha \frac{e\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma' + B\int_\beta \frac{e\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma',$$

qui, à cause des relations $A - M = M - B = \frac{A-B}{2}$, peuvent s'écrire

$$2\pi f_1 \leqq A\int_\sigma \frac{e\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma' - \frac{A-B}{2}\int_\beta \frac{e\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma',$$

$$2\pi f_1 \geqq B\int_\sigma \frac{e\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma' + \frac{A-B}{2}\int_\alpha \frac{e\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma',$$

ou bien, en utilisant l'équation (2) et en désignant par θ_α, θ_β deux quantités *positives* dont la somme est égale à 1,

$$\frac{f_1}{e} \leqq A - \theta_\beta\,\frac{A-B}{2}, \qquad \frac{f_1}{e} \geqq B + \theta_\alpha\,\frac{A-B}{2}.$$

Si donc on appelle Θ_β la valeur de θ_β correspondant au maximum A_1 du rapport $\frac{f_1}{e}$ et ϑ_α la valeur de θ_α correspondant à son

---

([1]) *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential.* Leipzig; 1877.

minimum B_1, on aura

$$A_1 \leqq A - \theta_\beta \frac{A-B}{2}, \qquad B_1 \geqq B + \vartheta_\alpha \frac{A-B}{2};$$

d'où, en retranchant,

$$A_1 - B_1 \leqq (A-B)\left(1 - \frac{\theta_\beta + \vartheta_\alpha}{2}\right).$$

De là résulte qu'on peut assigner une quantité déterminée λ, positive et plus petite que l'unité, telle que, si l'on désigne par A_n le maximum et par B_n le minimum de $\frac{f_n}{e}$, on ait

$$A_n - B_n \leqq \lambda^n (A-B).$$

La différence entre le maximum et le minimum de $\frac{f_n}{e}$ tendant vers zéro, il s'ensuit que $\frac{f_n}{e}$ tend vers une constante (¹). C. Q. F. D.

Cette constante n'est pas nulle en général (elle ne l'est jamais quand la fonction f a partout le même signe). Le module de cette constante ne peut dépasser (²) la plus grande valeur absolue du rapport $\frac{f}{e}$.

Le théorème précédent peut servir à la détermination des fonctions qui satisfont, dans l'espace, à l'équation $\Delta V = 0$, et qu'on assujettit en tous les points d'une surface convexe à diverses conditions (V ou sa dérivée suivant la normale donnée).

(¹) Pour un complément nécessaire à la démonstration, *voir* le début du paragraphe suivant.

(²) En effet, si l'on appelle C la plus grande valeur de $\frac{f}{e}$ sur la surface, on a

$$|f_1| < \frac{C}{2\pi} \int_\sigma \frac{e \cos\varphi}{r^2} \, d\sigma' = Ce.$$

Donc le module de $\frac{f_1}{e}$ et *a fortiori* celui de $\frac{f_n}{e}$ sont inférieurs à C. Si c est la plus petite valeur absolue de $\frac{f_1}{e}$, on reconnaît aisément que le module de $\frac{f_n}{e}$ est supérieur à c. (*Note tirée d'une première rédaction.*)

II. — Distribution de l'électricité induite sur une surface fermée convexe.

Nous venons d'établir, au paragraphe précédent, que si l'on désigne par $f(x, y, z)$ une fonction *quelconque*, déterminée et finie en tout point $m(x, y, z)$ d'une surface fermée et convexe σ, n'ayant en chaque point qu'un seul plan tangent, les intégrales

$$f_1(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f(x', y', z')\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma',$$

$$f_2(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f_1(x', y', z')\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma',$$

. . . . ,

$$f_{n+1}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f_n(x', y', z')\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma',$$

. . . . ,

où $d\sigma'$ représente un élément de surface autour du point $m'(x', y', z')$, où r est la distance mm' et φ l'angle de la droite mm' avec la normale en m, tendent, quand n augmente indéfiniment, vers la valeur e qu'a au point m la densité de la couche électrique en équilibre *d'elle-même* sur la surface σ.

Nous avons toutefois, en vue d'abréger, admis implicitement que l'on a, en tout point de la surface,

$$\lim_{n=\infty} (f_{n+1} - f_n) = 0.$$

C'est ce dont il est facile de s'assurer. On a, en effet,

$$f_{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f'_n}{e'}\,\frac{e'\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma',$$

en désignant par e' et f'_n les valeurs de e et de f_n au point m', et aussi

$$f_n = \frac{f_n}{e}\,\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{e'\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma',$$

en vertu de l'équation fonctionnelle (2). De là résulte

$$f_{n+1} - f_n = \frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{f'_n}{e'} - \frac{f_n}{e}\right)\frac{e'\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma',$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$|f_{n+1} - f_n| < e\left|\frac{f'_n}{e'} - \frac{f_n}{e}\right|.$$

Mais on a visiblement

$$\left|\frac{f'_n}{e'} - \frac{f_n}{e}\right| < A_n - B_n \leqq \lambda^n(A - B),$$

ce qui prouve bien que $f_{n+1} - f_n$ tend vers zéro.

Bien que la densité e dépende du calcul d'une infinité d'intégrales $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, *la charge totale* M *peut s'obtenir par une seule quadrature*. En effet, multiplions les deux membres de la relation qui définit $f_1(x, y, z)$ par l'élément $d\sigma$ de surface au point m, et intégrons sur toute la surface. Nous aurons

$$\begin{aligned}\int_\sigma f_1(x, y, z)\, d\sigma &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_\sigma \frac{f(x', y', z')\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma f(x', y', z')\, d\sigma' \int_\sigma \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma.\end{aligned}$$

Or $\frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma$ est l'angle solide sous lequel l'élément $d\sigma$ est vu du point m' de la surface : on a donc

$$\int_\sigma \frac{\cos\varphi}{r^2}\, d\sigma = 2\pi.$$

De là résulte, par une conséquence immédiate,

$$(3) \qquad \int_\sigma f\, d\sigma = \int_\sigma f_1\, d\sigma = \ldots = \int_\sigma f_n\, d\sigma = \ldots.$$

Comme f_n tend vers e, la valeur commune de ces intégrales est la charge cherchée M. Donc, la charge totale M est, en particulier, représentée par l'intégrale $\int_\sigma f\, d\sigma$.

Supposons maintenant que le conducteur σ soit soumis à l'influence de charges fixes *extérieures*. Soit $2\pi f$ la composante normale (comptée positivement dans le sens de la normale extérieure) des actions que ces charges exercent sur un point de la surface.

La densité électrique ε en ce point est donnée (*voir* ci-dessus p. 7) par l'équation fonctionnelle

$$(4)\qquad \varepsilon = f + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varepsilon' \cos\varphi}{r^2}\, d\sigma',$$

où ε' est la valeur que prend ε en un point m' de l'élément $d\sigma'$. On satisfait à cette équation par la série

$$(5)\qquad \varepsilon = f + f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots,$$

comme on le voit immédiatement en se reportant à la définition des intégrales $f_1, f_2, \ldots$.

Or f_n tend vers zéro, densité de l'électricité en équilibre *d'elle-même* sur σ. On peut donc écrire

$$-f_n = (f_{n+1} - f_n) + (f_{n+2} - f_{n+1}) + \ldots,$$

et, en tenant compte des inégalités de la page précédente (¹), particularisées par la supposition purement algébrique $e = 1$ (puisqu'ici $e = 0$),

$$|f_n| < (A - B)(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots) = (A - B)\frac{\lambda^n}{1 - \lambda}.$$

Donc, la série (5) a ses termes inférieurs à ceux d'une progression géométrique décroissante et, par suite, elle est convergente. Quant à la charge $\int_\sigma \varepsilon\, d\sigma$, elle est nulle en vertu des équations (3), à cause de la condition nécessaire

$$\int_\sigma f\, d\sigma = 0.$$

Si le conducteur est évidé, et si les charges inductrices sont *intérieures*, la densité ε est fournie par l'équation fonctionnelle

$$(6)\qquad \varepsilon = f - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\varepsilon' \cos\varphi}{r^2}\, d\sigma',$$

où f est compté positivement vers l'intérieur. On y satisfait par la série convergente

$$(7)\qquad \varepsilon = \lim_{n=\infty}\left(f - f_1 + f_2 - f_3 + \ldots \pm f_n \mp \frac{1}{2} f_{n+1}\right),$$

(¹) Dans ces inégalités, devant les signes | |, il faut lire *maximum de*.

d'où résulte pour la fonction V, supposée nulle à l'infini, l'expression

$$(8)\qquad V = \int_\sigma \frac{f - f'_1}{r}\, d\sigma' + \int_\sigma \frac{f_1 - f'_2}{r}\, d\sigma' + \ldots.$$

La charge est facile à calculer; car, en vertu des relations (3), on a simplement, suivant que n est pair ou impair,

$$\int_\sigma \varepsilon\, d\sigma = \lim \int_\sigma \left(f_n - \frac{1}{2} f_{n+1}\right) d\sigma, \qquad \int_\sigma e\, d\sigma = \lim \int_\sigma \frac{1}{2} f_{n+1}\, d\sigma,$$

ce qui peut s'écrire dans les deux cas

$$(9)\qquad \lim \frac{1}{2} \int_\sigma f_n\, d\sigma = \frac{1}{2} \int_\sigma f\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma 2\pi f\, d\sigma.$$

On vérifie par là que la charge du conducteur est égale et de signe contraire à la somme des charges inductrices.

Les résultats qui précèdent donnent la solution immédiate du problème suivant : Former une fonction V qui satisfasse à l'équation $\Delta V = 0$ dans l'espace intérieur à une surface fermée convexe σ (dépourvue de toute singularité), qui soit continue, ainsi que ses dérivées premières, dans cet espace et dont la dérivée suivant la normale intérieure ait en chaque point de σ une valeur donnée $2\pi f$. Cette fonction peut être prise égale et de signe contraire au potentiel d'une couche simple, de densité ε, répartie sur σ, qui exercerait aux points intérieurs infiniment voisins de σ une action normale égale à $2\pi f$ (comptée positivement suivant la normale intérieure). On aura donc

$$(10)\qquad V = \text{const.} - \int_\sigma \frac{\varepsilon}{r}\, d\sigma,$$

ε ayant la valeur (5).

Le problème *extérieur* corrélatif se résout par la même formule, ε ayant ici la valeur (7).

Remarque. — La solution précédente *prouve* l'existence d'une fonction V assujettie aux conditions énoncées, si l'on admet la possibilité de l'équilibre électrique *spontané*, possibilité qui a été démontrée rigoureusement par plusieurs géomètres.

III. — Sur le conducteur de capacité électrique minima.

J'ai établi (première Partie, Chapitre II, § V) que, si l'on néglige le carré de l'excentricité n, tous les sphéroïdes de même volume que la sphère, et qui ont même potentiel, possèdent la même charge : c'était démontrer en d'autres termes la condition nécessaire (mais non suffisante) pour que la sphère soit, de tous les conducteurs d'égal volume, celui qui a la capacité minima. Je vais compléter ce résultat, en faisant voir que, *parmi tous les conducteurs de même volume ou de même surface, la sphère possède une capacité électrique minima.*

Pour le prouver, observons que l'équation polaire de tout conducteur, très peu différent d'une sphère de rayon R, peut se mettre sous la forme

$$\rho = R(1 + \alpha n), \tag{11}$$

où α désigne une constante très petite et n une fonction des deux coordonnées θ, ψ. Si l'on s'en tient aux termes du second ordre inclusivement, on aura, pour l'inverse du rayon vecteur,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}(1 - \alpha n + \alpha^2 n^2), \tag{12}$$

et, pour l'élément de la surface σ du sphéroïde,

$$d\sigma = R^2(1 + 2\alpha n + \alpha^2 f)\, d\omega, \tag{13}$$

$d\omega$ désignant l'élément de la surface sphérique de rayon 1 et f une fonction de θ et de ψ, qu'il est inutile de calculer.

Au même degré d'approximation, la densité électrique e en un point du sphéroïde (11) s'écrira

$$e = e_0 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2, \tag{14}$$

e_0 étant une constante, e_1, e_2 des fonctions de θ, ψ.

Si l'on tient compte des relations (12), (13), (14), le potentiel au centre du sphéroïde

$$V = \int_\sigma \frac{e}{\rho}\, d\sigma,$$

s'exprimera par la formule

$$V = R\left\{4\pi e_0 + \alpha\int(ne_0 + e_1)\,d\omega + \alpha^2\int[(f - n^2)e_0 + ne_1 + e_2]\,d\omega\right\}.$$

Or j'ai démontré (p. 27) que l'on a pour tous les sphéroïdes

(15) $$V = 4\pi R e_0.$$

De cette équation et de la précédente résultent les conditions

(16) $$\int(ne_0 + e_1)\,d\omega = 0, \qquad \int[(f - n^2)\,e_0 + ne_1 + e_2]\,d\omega = 0.$$

D'autre part, l'intégrale $\int n\,d\omega$ représente, aux termes du second ordre près, l'excès du volume du sphéroïde sur celui de la sphère de rayon R, et aussi, en vertu de la formule (13), le demi-excès de la surface du sphéroïde sur celle de la sphère. Par suite, l'hypothèse de l'équivalence en volume ou en surface de tous ces sphéroïdes entraîne

(17) $$\int n\,d\omega = 0.$$

La charge $M = \int e\,d\sigma$ a pour expression, en vertu des relations (11), (12),

$$M = R^2\left[4\pi e_0 + \alpha\int(2ne_0 + e_1)\,d\omega + \alpha^2\int(fe_0 + 2ne_1 + e_2)\,d\omega\right].$$

Les conditions (15), (16) et (17) réduisent cette expression à

(18) $$\frac{M}{V} = R\left[1 + \frac{\alpha^2}{4\pi}\int n\left(n + \frac{e_1}{e_0}\right)d\omega\right].$$

Si l'on effectue le développement de n en série de fonctions sphériques

(19) $$n = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots,$$

développement qui satisfait bien à la condition (17), on sait (Poisson) que le rapport $\frac{e_1}{e_0}$ s'exprime par la série

(20) $$\frac{e_1}{e_0} = Y_2 + 2Y_3 + 3Y_4 + \ldots.$$

Il en résulte

$$(18)' \quad \frac{M}{V} = R\left[1 + \frac{\alpha^2}{4\pi}\int (Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots)(Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 + \ldots)\,d\omega\right].$$

Mais, en vertu de la propriété fondamentale des fonctions sphériques, le coefficient de α^2 se réduit à la quantité essentiellement positive

$$\int Y_1^2\,d\omega + 2\int Y_2^2\,d\omega + 3\int Y_3^2\,d\omega + \ldots.$$

Par conséquent, la capacité électrique $\frac{M}{V}$ est minima pour

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = \ldots = 0,$$

c'est-à-dire pour la sphère.

IV. — Distribution de l'électricité sur les faces internes d'un parallélépipède rectangle conducteur soumis à l'influence d'un point électrisé situé à son intérieur.

Pour obtenir cette distribution, il suffit de chercher le potentiel de l'électricité des faces (supposées au potentiel zéro) et de la charge du point donné sur un point quelconque intérieur au parallélépipède. Ce problème, traité pour la première fois par Riemann, peut être résolu de la manière la plus élémentaire par l'application pure et simple du principe des images.

Plaçons l'origine en l'un des sommets du parallélépipède donné et les axes des x, y, z suivant les directions des trois arêtes a, b, c issues de ce sommet. Considérons les faces internes de P comme réfléchissantes, et prenons toutes les images du point électrisé, de coordonnées α, β, γ, par rapport au système de miroirs formé par ces faces. Soit $+1$ la charge du point électrisé, et convenons que l'image directe d'un point dont la charge est $+1$ sera affectée de la charge -1, et inversement.

Si l'on construit le réseau de parallélépipèdes égaux à P, réseau dont les sommets ont pour coordonnées ma, nb, pc, les images se grouperont autour des sommets d'ordre pair ($2ma$, $2nb$, $2pc$) en coïncidence avec les sommets des parallélépipèdes Π ayant pour centres ces sommets et pour dimensions 2α, 2β, 2γ.

Si l'on appelle $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8$ les distances des images appartenant à un même parallélépipède Π à un point quelconque (x, y, z) intérieur à P, le potentiel du réseau des images sur le point (x, y, z) est

$$(21) \qquad V = \sum \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} - \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_7} - \frac{1}{r_8}\right),$$

la sommation s'étendant à tous les centres $(2ma, 2nb, 2pc)$ des parallélépipèdes Π.

C'est le potentiel cherché. En effet :

1° V se réduit à zéro sur l'une quelconque des faces de P; car, à toute image $+1$ correspond évidemment une image -1, symétrique de la première par rapport à cette face.

2° La série (21) est convergente. Pour le montrer, désignons par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la distance r du point (x, y, z) au centre d'un parallélépipède Π. Si l'on transporte l'origine au point (x, y, z), les coordonnées des huit sommets de ce parallélépipède, qui doivent être affectés alternativement des charges $+1$ et -1, sont :

$$\begin{array}{llll}
(1) & \lambda r + \alpha, \quad \mu r + \beta, \quad \nu r + \gamma, & (5) & \lambda r + \alpha, \quad \mu r + \beta, \quad \nu r - \gamma, \\
(2) & \lambda r + \alpha, \quad \mu r - \beta, \quad \nu r + \gamma, & (6) & \lambda r + \alpha, \quad \mu r - \beta, \quad \nu r - \gamma, \\
(3) & \lambda r - \alpha, \quad \mu r - \beta, \quad \nu r + \gamma, & (7) & \lambda r - \alpha, \quad \mu r - \beta, \quad \nu r - \gamma, \\
(4) & \lambda r - \alpha, \quad \mu r + \beta, \quad \nu r + \gamma, & (8) & \lambda r - \alpha, \quad \mu r + \beta, \quad \nu r - \gamma.
\end{array}$$

La partie v du potentiel fournie par les huit sommets de Π peut s'écrire

$$v = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_8}\right) + \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_5}\right) - \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_6}\right).$$

En posant

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2,$$

on a

$$\begin{aligned}
r_1^2 &= (\lambda r + \alpha)^2 + (\mu r + \beta)^2 + (\nu r + \gamma)^2 \\
&= r^2 \left[1 + 2\left(\lambda \frac{\alpha}{r} + \mu \frac{\beta}{r} + \nu \frac{\gamma}{r}\right) + \frac{\delta^2}{r^2}\right].
\end{aligned}$$

Supposons la distance r très grande, et évaluons $\frac{1}{r_1}$ jusqu'aux

termes du troisième ordre inclusivement, en négligeant ceux d'ordre supérieur :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left[1 + 2\left(\lambda\frac{\alpha}{r} + \mu\frac{\beta}{r} + \nu\frac{\gamma}{r}\right) + \frac{\delta^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{r}\left[1 - \left(\lambda\frac{\alpha}{r} + \mu\frac{\beta}{r} + \nu\frac{\gamma}{r}\right) - \frac{\delta^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\left(\lambda\frac{\alpha}{r} + \mu\frac{\beta}{r} + \nu\frac{\gamma}{r}\right)^2\right].$$

On déduit de là

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_7} = \frac{2}{r}\left(\lambda\frac{\alpha}{r} + \mu\frac{\beta}{r} + \nu\frac{\gamma}{r}\right), \quad \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_5} = \frac{2}{r}\left(-\lambda\frac{\alpha}{r} + \mu\frac{\beta}{r} + \nu\frac{\gamma}{r}\right),$$
$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_8} = \frac{2}{r}\left(\lambda\frac{\alpha}{r} + \mu\frac{\beta}{r} + \nu\frac{\gamma}{r}\right), \quad \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_6} = \frac{2}{r}\left(-\lambda\frac{\alpha}{r} + \mu\frac{\beta}{r} + \nu\frac{\gamma}{r}\right);$$

d'où l'on conclut que v ne contient *que des termes du quatrième ordre* $kr^{-4} + \ldots$, k étant une quantité variable finie.

Considérons maintenant un parallélépipède de très grandes dimensions, ayant pour centre l'origine et homothétique à P. A tout parallélépipède Π dont le centre est situé sur une de ses faces, et qui fournit au point (x, y, z) le potentiel kr^{-4}, correspond sur la face opposée le centre d'un parallélépipède Π' symétrique, qui fournit au même point le potentiel $-kr'^{-4}$. La somme de ces deux potentiels est évidemment un infiniment petit du cinquième ordre. On peut alors, à une très grande distance de l'origine, ne conserver que les parallélépipèdes Π situés dans le premier angle des coordonnées. Leur action est évidemment du même ordre de grandeur, au point (x, y, z), que celle d'une matière continue de densité variable, mais finie, agissant en raison inverse de la cinquième puissance de la distance. Dès lors si, de l'origine comme centre, on décrit dans le premier angle un quart d'hémisphère de rayon R suffisamment grand, la somme des termes de la série (21) sera, à partir d'un certain rang, comparable à l'intégrale

$$\int_R^\infty \frac{\pi r^2}{2}\frac{dr}{r^5} = \int_R^\infty \frac{\pi\, dr}{2r^3} = \frac{\pi}{4R^2},$$

qui tend vers zéro. Donc la série (21) est convergente. C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

LES CONDUCTEURS CREUX.

On démontre, en partant des lois de Coulomb, que l'électricité en équilibre réside tout entière à la surface extérieure des corps : la paroi d'une cavité creusée à l'intérieur d'un conducteur est absolument dépourvue d'électricité. Cette conséquence des lois de Coulomb en serait la plus éclatante confirmation, si l'on pouvait la vérifier expérimentalement; mais on ne peut évidemment opérer que sur des conducteurs percés d'ouvertures plus ou moins grandes. Il importe donc de rechercher les lois générales qui régissent la distribution électrique sur les conducteurs *creux*.

I. — Répartition d'une charge électrique sur un conducteur creux.

Pour définir avec précision ce que nous entendons par *conducteur creux,* nous imaginerons d'abord une surface S_1, limitée par une ligne *plane* K, et une seconde surface S_2, intérieure à la première et la coupant ou se raccordant avec elle le long de la ligne K; les deux surfaces peuvent couper le plan de la ligne K *en dehors, mais non à l'intérieur* de cette ligne. Si l'espace compris entre S_1 et S_2 a un volume fini et s'il est occupé par une matière conductrice, nous dirons que le corps terminé par ces deux surfaces est un *conducteur creux;* la surface S_1 sera la surface *externe,* et S_2 la surface *interne* du conducteur. La portion du plan entourée par la ligne K sépare l'espace *intérieur* à chacune des surfaces de l'espace qui lui est *extérieur.*

Lorsque la ligne K n'est pas plane, il faut imaginer la surface lieu des points d'où l'on voit cette ligne K *sous un angle égal à* 2π. Cette surface joue un rôle analogue à celui du plan dans les conducteurs précédemment considérés; elle sépare l'espace inté-

rieur à chacune des faces du conducteur de l'espace qui lui est extérieur.

Il est à peine besoin de faire remarquer que le *conducteur creux* diffère du *conducteur ouvert* par son épaisseur, qui est *finie*. Un conducteur creux, dont les deux faces externe et interne S_1 et S_2 viendraient à coïncider, serait un conducteur ouvert; nous n'aurons pour traiter ce cas limite qu'à supposer le conducteur creux devenu infiniment mince.

Cela posé, traçons à l'intérieur du conducteur une surface quelconque S limitée par l'arête saillante K ([1]), et affectons chacun de ses points d'une charge électrique $+1$. Soient $\mu = e\,dS_1$ et $\mu' = e'\,dS_2$ deux éléments électriques de S_1 et de S_2; soient ω et ω' les angles solides sous lesquels la ligne K est vue des points μ et μ'. En exprimant comme plus haut (deuxième Partie, Chap. I, § II) que les composantes normales des répulsions exercées sur la surface S par toute l'électricité répandue sur les faces S_1 et S_2 ont une somme égale à zéro, et remarquant que la totalité des éléments *situés sur l'arête vive* peut être négligée, comme ne représentant pas une quantité finie d'électricité, on arrive à l'équation

$$(22) \qquad \mathrm{S}\,\mu\omega = \mathrm{S}\,\mu'(4\pi - \omega').$$

Si maintenant on désigne par m la charge externe, par m' la charge interne, par M la charge totale, par ω_1, ω'_1 les valeurs maxima de ω et de ω', par ω_2, ω'_2 leurs valeurs minima, la relation précédente entraînera visiblement les deux inégalités

$$(23) \qquad m\omega_2 < m'(4\pi - \omega'_2), \qquad m'(4\pi - \omega'_1) < m\omega_1,$$

d'où résulte

$$(24) \qquad \frac{\omega_2}{4\pi - \omega'_2} < \frac{m'}{m} < \frac{\omega_1}{4\pi - \omega'_1}.$$

([1]) Plus exactement, par une courbe infiniment voisine de K. Par *éléments situés sur l'arête* K, nous entendons ceux de deux bandes très étroites prises le long du bord sur les surfaces S_1 et S_2, mais de largeur incomparablement plus grande que la distance entre la surface S et le bord mince. De la sorte, l'angle solide sous lequel on voit la ligne terminale de la surface S, d'un point quelconque du conducteur, pris en dehors des deux bandes, peut être confondu avec l'angle solide sous lequel on voit de ce point le bord K de ce conducteur.

On a ainsi une limite inférieure et une limite supérieure du rapport des deux charges. Si l'on remplace dans la seconde inégalité les deux angles ω_1 et ω'_1 par l'angle plus grand 2π, on augmente le dernier rapport, qui devient égal à l'unité. On a donc toujours $m' < m$, ce qui prouve que *l'électricité se porte en majeure partie sur la surface externe des conducteurs creux,* ainsi qu'on l'a déjà vu pour les conducteurs ouverts.

Si le conducteur creux devient infiniment mince, ω_1 et ω'_1 sont égaux, ainsi que ω_2 et ω'_2, et il vient

$$\frac{\omega_2}{4\pi - \omega_2} < \frac{m'}{m} < \frac{\omega_1}{4\pi - \omega_1},$$

ou encore

$$(24)' \qquad \frac{\omega_2}{4\pi} < \frac{m'}{M} < \frac{\omega_1}{4\pi},$$

ce qui est la double inégalité (62) de la deuxième Partie.

II. — Application au conducteur sphérique creux.

Nous prenons ici pour surfaces S_1 et S_2 deux calottes sphériques, situées du même côté d'un plan qui les coupe toutes les deux suivant un cercle K, de rayon r.

Pour étudier l'angle solide ω sous lequel un cercle est vu d'un point P d'une calotte sphérique qu'il termine, il suffit évidemment de couper la figure par un plan passant par un diamètre AB du cercle K et par son pôle D sur la calotte. Appelons 2β l'angle sous lequel le diamètre AB du cercle K est vu d'un point quelconque P du segment ADB. C'est l'angle au sommet du cône de révolution (D, AB) qui a D pour sommet et K pour base.

Quand le point P occupe sur le segment une position intermédiaire entre A et le pôle D, le cône défini par P et K est un cône oblique à base circulaire (P, AB), admettant pour l'un de ses plans de symétrie le plan PAB; les génératrices PA et PB font entre elles l'angle 2β; tout plan perpendiculaire à la bissectrice de l'angle APB coupe le cône suivant une ellipse dont le *petit* axe est situé dans le plan PAB. Cette dernière propriété résulte de

considérations géométriques très simples; c'est pourquoi nous ne nous arrêterons pas à la démontrer.

Quand le point P vient en A, le cône précédent se décompose en deux plans, savoir le plan du cercle K et le plan tangent à la sphère en A, plans qui font entre eux l'angle 2β.

Faisons coïncider le sommet du cône de révolution (D, AB) avec celui d'un des cônes obliques (P, AB), ainsi que l'axe de révolution du premier avec l'axe intérieur du second; les deux cônes seront bitangents, puisque les deux génératrices de section principale du second font un angle 2β égal à l'ouverture du premier. Dans cette position, il est visible que le cône de révolution est *intérieur* au cône oblique, le diamètre de chacun de ses parallèles étant le petit axe de la section du cône oblique. Enfin, si par le sommet commun des deux cônes on fait passer les deux plans dans lesquels dégénère le cône (P, AB) quand son sommet vient en A, et si l'on place ces plans de façon que le rectiligne de leur dièdre, qui est égal à 2β, vienne coïncider avec les deux côtés de l'angle APB, les deux cônes toucheront les deux faces de ce dièdre tout le long de leurs génératrices de contact et seront par conséquent *intérieurs* au dièdre.

Il n'y a plus qu'à couper le dièdre et les deux cônes par une sphère de rayon 1, ayant son centre en leur sommet commun, pour voir que le fuseau sphérique détaché par le dièdre a une aire plus grande que l'ellipse sphérique découpée par le cône oblique, et que cette ellipse sphérique a elle-même une aire plus grande que la calotte interceptée par le cône droit. Par suite, l'angle solide sous lequel le cercle K est vu d'un point P du segment est maximum et égal à 4β quand P est en A; il est minimum quand P est en D et sa valeur est alors

$$2\pi(1-\cos\beta) = 4\pi\sin^2\frac{\beta}{2},$$

aire de la calotte interceptée sur la sphère de rayon 1 par le cône droit dont le demi-angle au sommet est égal à β.

Il serait facile d'évaluer ces valeurs maxima et minima en fonction du rayon r du cercle K et du rayon R de la calotte sphérique, le sinus de 2β étant égal à $r:R$.

Convenons que l'angle β corresponde à la calotte extérieure S_1,

et soit β' la valeur de l'angle similaire pour la calotte intérieure S_2. La double inégalité (24) deviendra

$$(25) \qquad \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 - \sin^2 \frac{\beta'}{2}} < \frac{m'}{m} < \frac{\beta}{\pi - \beta'},$$

et, si le conducteur est *infiniment mince* ($\beta' = \beta$),

$$(25)' \qquad \sin^2 \frac{\beta}{2} < \frac{m'}{M} < \frac{\beta}{\pi},$$

ce qui est bien d'accord avec la double inégalité (63) de la deuxième Partie (Chap. I, § II). En particulier, pour un conducteur hémisphérique mince, le rapport de la charge intérieure m' à la charge totale M est compris entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{4}$.

III. — Application à la sphère mince percée d'un trou très petit.

D'un conducteur sphérique infiniment mince, de rayon R, supposons enlevée une calotte, dont la circonférence de base K a un diamètre très petit $AB = 2r$. Comme ici ω' est égal à ω, la relation générale (22) donne

$$\mathbf{S}\, \omega(\mu + \mu') = \mathbf{S}\, 4\pi\mu',$$

ou bien

$$(26) \qquad \int \omega \, dM = 4\pi m',$$

ce qu'on peut encore écrire

$$m' = \frac{1}{4\pi}\int \omega \rho \, d\sigma = \frac{R}{2}\int \omega \rho \, dz,$$

en prenant pour élément superficiel l'aire $2\pi R\, dz$ d'une zone élémentaire Z, limitée par deux plans parallèles à celui de K; si nous remarquons que la densité ρ est sensiblement constante

$$\rho = \frac{M}{4\pi R^2},$$

l'expression de m' deviendra

$$(27)\qquad m' = \frac{M}{8\pi R}\int \omega\, dz.$$

Quant au très petit angle solide ω sous lequel le cercle K est vu des divers points P de la zone Z, pour évaluer sa partie principale, désignons par l la distance de P à un élément d'aire ds de K et par z sa distance au plan de K. On aura visiblement

$$(28)\qquad d\omega = \frac{\cos(l, z)\, ds}{l^2} = \frac{z\, ds}{l^3}.$$

Comme l se confond avec la distance u du point P au centre de K, et comme on a approximativement

$$u^2 = 2Rz,$$

on peut écrire

$$(29)\qquad \omega = \frac{z}{u^3}\int ds = \frac{\pi r^2 z}{u^3} = \frac{\pi r^2}{2R\sqrt{2Rz}}.$$

Cette expression de ω, substituée dans la relation (27), donne

$$\frac{m'}{M} = \frac{r^2}{16R^2}\int_0^{2R} \frac{dz}{\sqrt{2Rz}},$$

parce que r peut être remplacé par zéro dans l'intégration, et il vient finalement

$$(30)\qquad \frac{m'}{M} = \frac{r^2}{8R^2}.$$

C'est à ce résultat qu'on serait arrivé en appliquant le théorème de la deuxième Partie (p. 39) qu'exprime l'équation

$$m' = \frac{m''}{2}.$$

En effet, désignant par σ l'aire de la calotte enlevée, on a

$$\frac{m''}{M} = \frac{\sigma}{4\pi R^2},$$

et, comme l'expression de σ

$$\sigma = 2\pi R^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right)$$

se réduit sensiblement à πr^2, on trouve bien

$$\frac{m''}{M} = \frac{r^2}{4R^2}, \quad \frac{m'}{M} = \frac{r^2}{8R^2}.$$

Mais le raisonnement précédent a l'avantage d'être direct. En invoquant le principe de superposition énoncé à l'endroit cité (p. 40), on trouve pour la charge intérieure d'une sphère percée de plusieurs petits trous de rayons $r_1, r_2, \ldots,$

$$\frac{m'}{M} = \frac{1}{8}\frac{r_1^2}{R^2} + \frac{1}{8}\frac{r_2^2}{R^2} + \ldots.$$

Ainsi cette charge intérieure augmente avec les dimensions et le nombre des trous. Elle est indépendante de leurs positions.

CHAPITRE III.

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION $\Delta V = 0$.

Nous allons nous occuper de déterminer, à l'intérieur d'une surface, une fonction satisfaisant à l'équation de Laplace, d'abord par ses valeurs à la surface, ensuite par les valeurs de sa dérivée suivant la normale. La solution de ces problèmes repose sur quelques propriétés des potentiels de *couches doubles*, que nous rappellerons tout d'abord.

I. — Potentiels de couches doubles.

Si, sur une surface fermée σ que, pour plus de simplicité, nous supposerons douée d'un plan tangent unique en chaque point, on distribue une couche double, de densité continue $\frac{\mu}{2\pi}$, le po-

tentiel de la couche en un point intérieur i a pour expression

$$(31) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \mu \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \mu\, d\omega,$$

r désignant la distance du point i à l'élément $d\sigma$, n la normale intérieure à cet élément et $d\omega$ l'angle solide sous lequel l'élément $d\sigma$ est vu du point i. Nous représenterons ce potentiel ([1]) par le symbole $\varphi_i\mu$.

Ce potentiel est discontinu sur la surface σ. Soit $\varphi\mu$ la valeur qu'il prend en un point m de cette surface; au point m_1, situé sur la normale intérieure en m et infiniment voisin de m, il prend une valeur $\varphi_1\mu$ différente de $\varphi\mu$, et l'on a

$$(32) \qquad \varphi_1\mu = \varphi\mu + \mu.$$

Au contraire, la composante $f\mu$ de la force exercée par la couche est continue sur la surface σ, ce qu'on exprime, avec des notations analogues aux précédentes, par l'égalité

$$(33) \qquad f_1\mu = f\mu.$$

Si l'on pose

$$(34) \qquad \begin{cases} \varphi'\mu = \varphi\varphi\mu = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi\mu\, d\omega, \\ \varphi''\mu = \varphi\varphi'\mu = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi'\mu\, d\omega, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi^{(n+1)}\mu = \varphi\varphi^{(n)}\mu = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \varphi^{(n)}\mu\, d\omega, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

les divers potentiels φ', φ'', ... ne dépassent jamais une certaine limite, pourvu que la surface σ soit *convexe*. Soit en effet M la plus grande valeur absolue de μ; on aura

$$|\varphi\mu| \leqq \frac{1}{2\pi}\int M\, d\omega = M,$$

([1]) Pour simplifier l'écriture, nous conviendrons que les lettres φ, ainsi que les lettres f et ψ introduites ci-dessous, porteront sur tout ce qui les suivra, comme dans $\varphi_i\mu$ la lettre φ_i porte sur μ.

et, par suite, aussi

$$|\varphi^{(n)}\mu| \leqq M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Mais il y a plus : les potentiels successifs $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n)}, \ldots$ tendent, lorsque n augmente indéfiniment, vers une valeur constante, quelle que soit la position du point m sur la surface convexe σ. (C. Neumann.)

II. — Détermination de V par ses valeurs à la surface.

Une fonction V, vérifiant l'équation $\Delta V = 0$, est supposée continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur d'une surface fermée convexe σ; en outre, elle est supposée continue sur la surface σ, c'est-à-dire qu'on a

$$(35) \qquad V_1 = V,$$

V étant la valeur relative à un point m de la surface, et V_1 la valeur relative au point m_1, situé sur la normale intérieure en m et infiniment voisin de m. On demande de *déterminer la valeur* V_i *de la fonction* V *en tout point i intérieur à* σ, *connaissant sa valeur en tout point de la surface.*

Nous partirons de la formule de Gauss

$$(36) \qquad V_i = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma V\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{dV_1}{dn}\frac{d\sigma}{r}.$$

En introduisant le potentiel de couche double $\varphi_i\mu$ et le potentiel $\psi_i\mu$ d'une *couche simple* de densité $\frac{\mu}{2\pi}$ répandue sur σ, nous écrirons cette formule comme suit

$$(36') \qquad 2V_i = \varphi_i V - \psi_i \frac{dV_1}{dn},$$

d'après la convention précédemment faite sur les symboles φ et ψ.

La relation (36'), appliquée au point m_1 et différentiée suivant la normale intérieure, donne

$$(37) \qquad 2\frac{dV_1}{dn} = f_1 V - \varphi_1 \frac{dV_1}{dn},$$

ou bien, eu égard aux conditions (32) et (33),

$$(37') \qquad \frac{dV_1}{dn} = \frac{1}{3} f V - \frac{1}{3} \varphi \frac{dV_1}{dn}.$$

Par la substitution de cette valeur de $\frac{dV_1}{dn}$ l'équation (36') devient

$$(38) \qquad 2 V_i = \varphi V - \frac{1}{3} \psi_i f V + \frac{1}{3} \psi_i \varphi \frac{dV_1}{dn}.$$

Appliquons encore cette équation au point m_1 et différentions-la suivant la normale intérieure, en tenant toujours compte des conditions (32) et (33) et en ayant égard aux relations (34). Il viendra

$$2 \frac{dV_1}{dn} = \frac{2}{3} f V - \frac{1}{3} \varphi f V + \frac{1}{3} \varphi' \frac{dV_1}{dn} + \frac{1}{3} \varphi \frac{dV_1}{dn}.$$

Cette dernière équation, ajoutée membre à membre avec l'équation (37'), donne

$$(38') \qquad \frac{dV_1}{dn} = \frac{1}{3} f V - \frac{1}{3^2} \varphi f V + \frac{1}{3^2} \varphi' \frac{dV_1}{dn}.$$

Substituant cette valeur de $\frac{dV_1}{dn}$ dans l'équation (38), et tenant compte des relations (34), on trouve

$$2 V_i = \varphi V - \frac{1}{3} \psi_i f V + \frac{1}{3^2} \psi_i \varphi f V - \frac{1}{3^3} \psi_i \varphi' f V + \frac{1}{3^3} \psi_i \varphi'' \frac{dV_1}{dn}.$$

Les mêmes transformations, répétées $n - 1$ fois encore, conduisent à la formule

$$(39) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2 V_i = \varphi V - \frac{1}{3} \psi_i f V + \frac{1}{3^2} \psi_i \varphi f V - \frac{1}{3^3} \psi_i \varphi' f V + \ldots \\ \mp \frac{1}{3^{n+2}} \psi_i \varphi^{(n)} f V \pm \frac{1}{3^{n+2}} \psi_i \varphi^{(n+1)} \frac{dV_1}{dn}. \end{aligned} \right.$$

Or l'intégrale $\varphi^{(n+1)} \frac{dV_1}{dn}$ et, par suite aussi, $\psi_i \varphi^{(n+1)} \frac{dV_1}{dn}$ ne dépassent jamais une limite finie. Donc le terme complémentaire $\frac{1}{3^{n+2}} \psi_i \varphi^{(n+1)} \frac{dV_1}{dn}$ tend vers zéro, en sorte que V_i est exprimé par la série

$$(40) \qquad 2 V_i = \varphi V - \frac{1}{3} \psi_i f V + \frac{1}{3^2} \psi_i \varphi f V - \frac{1}{3^2} \psi_i \varphi' f V + \ldots,$$

convergente à raison de la manière même dont elle a été obtenue.

Carl Neumann a résolu la même question par un autre développement. Sa méthode repose sur la propriété des potentiels successifs φ', φ'', φ''', ... de tendre vers une limite constante, quelle que soit la position du point m sur la surface convexe σ. Nous allons utiliser cette propriété pour la solution du problème suivant, que Neumann n'a pas traité.

III. — Détermination de V par les valeurs de $\frac{dV}{dn}$.

Une fonction V, vérifiant l'équation $\Delta V = 0$, est supposée continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur d'une surface fermée convexe σ; en outre, on suppose que sa dérivée suivant la normale $\frac{dV}{dn}$ est continue sur la surface, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{dV_1}{dn} = \frac{dV}{dn}$$

avec les notations précédentes. On demande de *déterminer la valeur* V_i *de la fonction* V *en tout point i intérieur à* σ, *connaissant* $\frac{dV}{dn}$ *en tous les points de la surface.*

Nous partirons encore de la formule de Gauss

$$(41) \qquad V_i = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma V_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{dV}{dn}\frac{d\sigma}{r},$$

que nous écrirons

$$2V_i = \varphi_i V_1 - \psi_i \frac{dV}{dn}.$$

Appliquons cette formule au point m_1, en remarquant que le potentiel de couche simple $\psi_i \mu$ a la même valeur $\psi\mu$ au point m_1 qu'au point infiniment voisin m et en ayant égard à la relation (32). Nous trouvons ainsi

$$V_1 = \varphi_i V_1 - \psi \frac{dV}{dn}.$$

Cette valeur de V_1, substituée dans l'équation (41), donne

$$2V_i = \varphi_i \varphi V - \psi_i \frac{dV}{dn} - \varphi_i \psi \frac{dV}{dn}$$

et, par une deuxième substitution,

$$2V_i = \varphi_i\varphi' V - \psi_i \frac{dV}{dn} - \varphi_i\psi \frac{dV}{dn} - \varphi_i\varphi\psi \frac{dV}{dn}.$$

En répétant indéfiniment la même transformation et remarquant que, d'après Neumann, on a

$$\lim_{n=\infty} \varphi^{(n)}\mu = \frac{C}{2}$$

et, par suite,

$$\lim_{n=\infty} \varphi_i\varphi'^{(n)} V_1 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{C}{2}\, d\omega = C,$$

nous obtenons, pour exprimer V, la série

$$(42)\quad 2V_i = C - \psi_i \frac{dV}{dn} - \varphi_i\psi \frac{dV}{dn} - \varphi_i\varphi\psi \frac{dV}{dn} - \varphi_i\varphi'\psi \frac{dV}{dn} - \varphi_i\varphi''\psi \frac{dV}{dn} - \ldots,$$

qui est convergente, d'après la manière même dont elle a été obtenue, et qui contient, comme cela devait être, une constante arbitraire C.

IV. — Généralisation du premier problème.

La série (40) s'applique à des cas bien plus étendus que celle de Neumann. Elle convient à des corps limités par des surfaces qu'une droite peut percer en quatre points : tels sont les espaces convexes doublement connexes comme les tores, les corps creux compris entre deux surfaces convexes, l'une intérieure τ, l'autre extérieure τ'. Il suffit de prouver que, dans ce cas encore, le terme complémentaire $\frac{1}{3^{n+2}}\psi_i\varphi^{(n+1)}\frac{dV}{dn}$ tend vers zéro, ou simplement que $\frac{1}{3^n}\varphi^{(n)}\mu$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Tout d'abord, on voit aisément que si Φ désigne la plus grande valeur absolue de $\varphi\mu$ sur la surface entière $\tau + \tau'$, on a, pour tout point de l'une de ses nappes,

$$|\varphi'\mu| = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau+\tau'} \varphi\, d\omega \leqq 3\Phi,$$

et, par suite,

$$|\varphi^{(n)}\mu| \leqq 3^n\Phi.$$

Nous pouvons donc poser

$$\frac{1}{3^n}\varphi_\mu^{(n)} = \chi_n, \tag{43}$$

et nous savons que le rapport χ_n ne peut pas croître indéfiniment avec n. Nous prouverons qu'il tend vers zéro.

Prenons d'abord le point m sur la nappe intérieure τ et convenons d'affecter les lettres φ de l'indice τ quand elles désigneront des valeurs de potentiels de couche double relatives aux points de cette nappe τ. Soient A le maximum et B le minimum de φ sur la surface entière $\tau + \tau'$, et soit M la moyenne $\frac{A+B}{2}$. Partageons la nappe τ en deux régions, l'une α correspondant aux valeurs de φ plus grandes que M, l'autre β aux valeurs de φ plus petites que M; partageons de même la nappe τ' en deux régions analogues α' et β'. On a

$$\begin{aligned}\varphi'_\tau &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_\alpha \varphi\, d\omega + \int_\beta \varphi\, d\omega - \int_{\alpha'} \varphi\, d\omega - \int_{\beta'} \varphi\, d\omega\right)\\ &\leqq \frac{1}{2\pi}(A\omega_\alpha + M\omega_\beta - M\omega_{\alpha'} - B\omega_{\beta'}),\end{aligned}$$

chaque lettre ω représentant l'intégrale de $d\omega$ étendue à la région que désigne son indice. En vertu des relations

$$\omega_\alpha + \omega_\beta = 4\pi, \qquad \omega_{\alpha'} + \omega_{\beta'} = 2\pi, \qquad M = \frac{A+B}{2},$$

l'inégalité précédente peut s'écrire

$$\varphi'_\tau \leqq A + (A-B)\left(1 - \frac{\omega_\beta + \omega_{\alpha'}}{4\pi}\right). \tag{44}$$

On trouvera de même

$$\varphi'_\tau \geqq B - (A-B)\left(1 - \frac{\omega_\alpha + \omega_{\beta'}}{4\pi}\right). \tag{45}$$

Prenons maintenant le point m sur la nappe extérieure τ'. Soit θ l'angle solide, inférieur à 2π, sous lequel la nappe τ est vue du point m. La courbe de contact du cône (d'ouverture θ), qui a pour sommet m et qui est circonscrit à τ, sépare cette nappe en deux parties, l'une τ_1 du côté de m, l'autre τ_2 du côté opposé à m. Nous partagerons la première en deux régions α_1 et β_1, la seconde en deux régions α_2 et β_2, définies respectivement comme les régions α et β.

Nous aurons, pour la valeur $\varphi'_{\tau'}$ de φ' au point m, l'expression

$$\begin{aligned}\varphi'_{\tau'} &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\tau'}\varphi\,d\omega + \int_{\tau_1}\varphi\,d\omega - \int_{\tau_2}\varphi\,d\omega\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\alpha'}\varphi\,d\omega + \int_{\beta'}\varphi\,d\omega + \int_{\alpha_1}\varphi\,d\omega + \int_{\beta_1}\varphi\,d\omega - \int_{\alpha_2}\varphi\,d\omega - \int_{\beta_2}\varphi\,d\omega\right),\end{aligned}$$

d'où résulte

$$\varphi'_{\tau'} \leqq \frac{1}{2\pi}(A\,\omega_{\alpha'} + M\,\omega_{\beta'} + A\,\omega_{\alpha_1} + M\,\omega_{\beta_1} - M\,\omega_{\alpha_2} - B\,\omega_{\beta_2}).$$

En vertu des relations

$$\omega_{\alpha'} + \omega_{\beta'} = 2\pi, \qquad \omega_{\alpha_1} + \omega_{\beta_1} = \omega_{\alpha_2} + \omega_{\beta_2} = 0, \qquad M = \frac{A+B}{2},$$

cette inégalité prend la forme

$$(46)\qquad \varphi'_{\tau'} \leqq A + (A-B)\left(\frac{\theta}{2\pi} - \frac{\omega_{\beta'} + \omega_{\beta_1} + \omega_{\alpha_2}}{4\pi}\right).$$

On trouvera de même

$$(47)\qquad \varphi'_{\tau'} \geqq B - (A-B)\left(\frac{\theta}{2\pi} - \frac{\omega_{\alpha'} + \omega_{\alpha_1} + \omega_{\beta_2}}{4\pi}\right).$$

Cela posé, soient A' le maximum et B' le minimum de φ' sur la surface entière $\tau + \tau'$. Quatre cas peuvent se présenter, suivant que les points où φ' acquiert ces valeurs extrêmes sont tous les deux sur la nappe τ, ou l'un sur τ et l'autre sur τ', ou tous les deux sur la nappe τ'. Pour le premier cas, les inégalités (46) et (47) donnent, les Ω majuscules désignant les valeurs des diverses fonctions ω qui correspondent aux points considérés,

$$\begin{aligned}A' &\leqq A + (A-B)\left(1 - \frac{\Omega_\beta + \Omega_{\alpha'}}{4\pi}\right),\\ B' &\geqq B - (A-B)\left(1 - \frac{\Omega_\alpha + \Omega_{\beta'}}{4\pi}\right).\end{aligned}$$

On en déduit

$$A' - B' \leqq (A-B)\left(2 - \frac{\Omega_\alpha + \Omega_\beta + \Omega_{\alpha'} + \Omega_{\beta'}}{4\pi}\right) < 2(A-B).$$

Dans les trois autres cas, la comparaison des inégalités (44),

(45), (46) et (47) conduirait à la même conclusion. Il en résulte

$$A^{(n)} - B^{(n)} < 2^n (A - B),$$

$A^{(n)}$ et $B^{(n)}$ représentant le maximum et le minimum de $\varphi^{(n)}\mu$ sur la surface entière $\tau + \tau'$. Cette dernière inégalité, rapprochée de l'équation (43), donne

$$\max.\chi_n - \min.\chi_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n (A - B).$$

Comme χ_n ne peut croître indéfiniment avec n, il résulte de là que χ_n tend vers une même constante C pour tous les points de la surface $\tau + \tau'$. Posons donc

$$\begin{aligned} \chi_n &= C + \varepsilon_n, \\ \chi_{n+p} &= C + \varepsilon_{n+p}, \end{aligned} \qquad (\lim \varepsilon_n = \lim \varepsilon_{n+p} = 0).$$

Or on a, quel que soit l'entier positif p,

$$\varphi^{(n+p)}\mu = \varphi^{(p)}\varphi^{(n)}\mu = 3^n \varphi^{(p)}\chi_n = 3^n [\varphi^{(p)} C + \varphi^{(p)}\varepsilon_n],$$

et l'on voit aisément que, pour tout point de la surface $\tau + \tau'$, on a

$$\varphi C = C, \qquad \ldots, \qquad \varphi^{(p)} C = C, \qquad \varphi^{(p)}\varepsilon_n = 3^p \eta,$$

η étant une quantité du même ordre que ε ou infiniment plus petite. Il vient donc

$$\varphi^{(n+p)}\mu = 3^{n+p}(C + \varepsilon_{n+p}) = 3^n (C + 3^p \eta),$$

ce que l'on peut écrire

$$C + \varepsilon_{n+p} = \frac{C}{3^p} + \eta.$$

Faisons maintenant croître indéfiniment n et p; comme η et ε_{n+p} tendent vers zéro, la constante C est nécessairement nulle, ce qui établit notre théorème.

Le principe de cette démonstration est emprunté à la méthode de la *moyenne arithmétique* de Carl Neumann.



HYDRODYNAMIQUE.

LE

PROBLÈME GÉNÉRAL

DE

L'HYDRODYNAMIQUE.

I. — Intégrales complètes des équations de l'Hydrodynamique.

Helmholtz a montré comment la vitesse (u, v, w) en chaque point d'un fluide s'exprime en fonction des rotations ξ, η, ζ, en se bornant au cas particulier où les filets tourbillonnaires n'arrivent pas jusqu'à la surface terminale ou ne l'atteignent que tangentiellement. Je reprends l'analyse de Helmholtz en m'affranchissant de cette restriction.

Il s'agit d'intégrer les quatre équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre et du premier degré

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\xi, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\eta, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\zeta. \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

où ξ, η, ζ sont assujettis à la condition

$$(3)\qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Cherchons d'abord une solution particulière u_1, v_1, w_1. Pour cela, appelons $d\tau'$ un élément de volume du fluide; $d\sigma'$ un élément de la surface terminale, dont la normale intérieure n aura pour

cosinus directeurs α', β', γ'; x', y', z' un point de $d\tau'$ ou de $d\sigma'$; r la distance du point (x, y, z) au point (x', y', z'). Posons

$$(4)\quad \begin{cases} U = \dfrac{1}{2\pi}\left[\displaystyle\int \frac{\xi'}{r}\,d\tau' + \frac{1}{3}\int (\alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma'\zeta')\log(x - x' + r)\,d\sigma'\right], \\ V = \dfrac{1}{2\pi}\left[\displaystyle\int \frac{\eta'}{r}\,d\tau' + \frac{1}{3}\int (\alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma'\zeta')\log(y - y' + r)\,d\sigma'\right], \\ W = \dfrac{1}{2\pi}\left[\displaystyle\int \frac{\zeta'}{r}\,d\tau' + \frac{1}{3}\int (\alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma'\zeta')\log(z - z' + r)\,d\sigma'\right]. \end{cases}$$

Nous obtenons la solution particulière cherchée en prenant

$$(5)\qquad u_1 = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},\qquad v_1 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},\qquad w_1 = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

En effet :

1° Ces expressions satisfont visiblement à l'équation (2);

2° Elles satisfont, par exemple, à la première des équations (1); car des formules (5) on tire

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\Delta U + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right).$$

Or on trouve sans difficulté

$$\Delta \log(x - x' + r) = 0$$

pour tout point (x, y, z) autre que (x', y', z'); de là résulte

$$\Delta U = \Delta\left(\frac{1}{2\pi}\int \frac{\xi'}{r}\,d\tau'\right) = -2\xi.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int \xi' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau' + \frac{1}{3}\int (\alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma' z')\frac{d\sigma'}{r}$$

et

$$\int \xi' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau' = -\int \xi' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,d\tau' = -\int \alpha'\xi'\frac{d\sigma'}{r} + \int \frac{\partial \xi'}{\partial x'}\frac{d\tau'}{r};$$

par suite

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \int \left(\frac{\partial \xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z'}\right)\frac{d\tau'}{r} = 0,$$

en vertu de la condition (3). Donc

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = 2\xi, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette vérification suppose que les rotations sont continues. S'il existe pour les rotations une surface de discontinuité σ_1, et que l'on désigne par $\xi'_1 - \xi_1$, $\eta'_1 - \eta_1$, $\zeta'_1 - \zeta_1$ l'accroissement brusque de la rotation quand on passe, en traversant σ_1, de la région où ne se trouve pas le point (x, y, z) à la région où il se trouve, il faut ajouter à l'expression (4) de U, par exemple, le terme

$$\int [\alpha_1(\xi'_1 - \xi_1) + \beta_1(\eta'_1 - \eta_1) + \gamma_1(\zeta'_1 - \zeta_1)] \log(x - x_1 + r)\, d\sigma_1.$$

Ce terme disparaît si la surface de discontinuité σ_1 est partout tangente aux filets tourbillonnaires.

En supprimant dans les formules (4) les termes relatifs à la surface terminale, on retombe sur la solution particulière de Helmholtz.

On peut transformer les expressions (4) de U, V, W de manière à en éliminer les intégrales de surface. On a, en effet,

$$\begin{aligned} &\int (\alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma'\zeta') \log(x - x' + r)\, d\sigma' \\ &\quad = \int \left(\xi' \frac{\partial}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial}{\partial z'}\right) \log(x - x' + r)\, d\tau' \\ &\qquad + \int \left(\frac{\partial \xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z'}\right) \log(x - x' + r)\, d\tau'. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est nulle en vertu de la condition (3); il en résulte pour U, V, W les formules nouvelles

$$(4')\qquad \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{1}{6\pi} \int \left[2\xi' - \frac{\eta'(y - y') + \zeta'(z - z')}{x - x' + r}\right] \frac{d\tau'}{r}, \\ V &= \frac{1}{6\pi} \int \left[2\eta' - \frac{\zeta'(z - z') + \xi'(x - x')}{y - y' + r}\right] \frac{d\tau'}{r}, \\ W &= \frac{1}{6\pi} \int \left[2\zeta' - \frac{\xi'(x - x') + \eta'(y - y')}{z - z' + r}\right] \frac{d\tau'}{r}. \end{aligned} \right.$$

Elles conviennent également au cas des rotations continues et au cas des rotations discontinues.

La solution générale du système (1), (2) est

$$(6)\qquad u = u_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = v_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = w_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

φ étant une fonction continue, ainsi que ses dérivées, qui satisfait dans tout le fluide à l'équation $\Delta\varphi = 0$, et que détermine (à une constante près) la connaissance de la composante normale $\alpha u + \beta v + \gamma w$ de la vitesse en chaque point de la surface terminale; les équations (6) donnent en effet

$$\frac{d\varphi}{dn} = \alpha u + \beta v + \gamma w - (\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1).$$

Remarque. — Si l'on se reporte aux expressions (5) des vitesses u_1, v_1, w_1, on voit qu'il faut montrer que les dérivées partielles de U, V, W ne sont pas infinies. Or on a, par exemple,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int (\alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma'\zeta') \frac{y - y'}{x - x' + r} \frac{d\sigma'}{r}.$$

Le dénominateur $x - x' + r$ s'annule pour le point de la surface $y = y'$, $z = z'$, situé par rapport à (x, y, z) dans la direction de l'axe des x. Projetons ce point sur le plan des yz, et de la projection P comme centre décrivons une série de petits cercles de rayon ρ $(0 < \rho < \rho_1)$. Posons

$$y' - y = \rho\cos\theta, \qquad z' - z = \rho\sin\theta.$$

Nous aurons

$$d\sigma' = \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\alpha'},$$

$$\frac{y - y'}{r + x - x'} = \frac{y - y'}{r^2 - (x - x')^2} (r + x' - x)$$
$$= \frac{y - y'}{(y' - y)^2 + (z' - z)^2} (r + x' - x) = \frac{-\cos\theta}{\rho} (r + x' - x).$$

On a dès lors, pour la portion de l'intégrale relative au petit cercle ρ_1,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_1} (\alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma'\zeta') \frac{r + x' - x}{r\alpha'} \cos\theta\, d\rho\, d\theta.$$

Dans le cercle de rayon ρ_1 la quantité finie

$$(\alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma'\zeta')\,\frac{r + x' - x}{r\alpha'}$$

peut se développer suivant les puissances ascendantes de ρ :

$$(\alpha'\xi' + \beta'\eta' + \gamma'\zeta')\,\frac{r + x' - x}{r\alpha'} = c + \rho f(\theta) + \ldots,$$

c étant indépendant de θ et $f(\theta)$ étant fini. Il en résulte

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\rho_1^2}{2}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos\theta\, d\theta;$$

d'où l'on conclut que $\frac{\partial U}{\partial y}$ n'est pas infini.

II. — Possibilité et détermination du problème général de l'Hydrodynamique.

Lemme. — *Lorsqu'une fonction $\varphi(x, y, z)$, finie et continue ainsi que ses dérivées premières, à l'intérieur d'une surface S, et satisfaisant dans tout cet espace à l'équation $\Delta\varphi = 0$, est donnée en tous les points d'une surface fermée Σ, intérieure à S, elle est déterminée en tous les points compris entre Σ et S.*

En effet, supposons qu'il existe une autre fonction φ_1, satisfaisant aux conditions de l'énoncé. La différence $\varphi_1 - \varphi$ y satisfera aussi. Cette différence $\varphi_1 - \varphi$ est nulle sur toute la surface Σ; elle est donc nulle en tous les points intérieurs à Σ. Donc, en vertu d'un théorème de Gauss, elle est nulle dans tout l'espace compris entre Σ et S. Par conséquent, $\varphi_1 = \varphi$ dans ce dernier espace.

Remarque. — Au lieu de donner la fonction φ sur toute la surface Σ, on peut donner φ sur une portion de cette surface et, sur la portion restante, la dérivée de φ suivant la normale.

Théorème. — *Le mouvement d'un liquide est toujours possible et complètement déterminé lorsqu'on donne :*

1° *Les vitesses initiales (supposées continues) de tous ses points, en grandeur et direction;*

2° *Les composantes normales des vitesses sur certaines parties de sa surface et la pression sur les portions restantes; cela à tout instant.*

Il suffit de montrer que, si l'on connaît les vitesses (u, v, w) pour tous les points (x, y, z) à l'instant t, on peut en conclure leurs valeurs (u', v', w') pour les nouvelles positions (x', y', z') des mêmes points matériels, à l'instant infiniment voisin $t' = t + dt$, et que, si u, v, w sont continues, u', v', w' le sont aussi.

A cet effet, rappelons les formules (6) de l'article précédent :

$$(6) \qquad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + u_1, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + v_1, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + w_1.$$

Puisque u_1, v_1 et w_1 sont déterminées par les formules (5) et qu'on suppose u, v, w connues à l'instant t, on voit que les trois dérivées de φ par rapport à x, y, z sont connues; donc φ est déterminé, à une fonction du temps près; mais on peut supposer cette fonction nulle, ce qui n'influe pas sur les valeurs des vitesses.

Cela posé, concevons une surface S enfermant la surface terminale Σ du liquide au temps t, et assez grande pour comprendre sa surface terminale Σ' à l'instant t'. D'après le lemme, la fonction φ est déterminée pour tous les points compris entre Σ et S, si on lui impose d'être finie et continue en ces points et d'y satisfaire à l'équation $\Delta\varphi = 0$.

Supposons maintenant que le temps s'accroisse de dt et accentuons les lettres relatives au temps $t' = t + dt$.

Les nouvelles positions des points du liquide sont données par les formules

$$x' = x + u\,dt, \qquad y' = y + v\,dt, \qquad z' = z + w\,dt;$$

on connaît donc les nouvelles distances r' des points (x', y', z') aux divers éléments de volume $d\tau'$. Les nouvelles rotations sont données par les formules

$$\xi' = \xi + \left(\xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z}\right)dt, \qquad \eta' = \ldots, \qquad \zeta' = \ldots.$$

On connaît, par conséquent, U', V', W' et u'_1, v'_1, w'_1, grâce aux

relations (4) et (5). Les nouvelles vitesses

$$(6') \qquad u' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} + u'_1, \qquad v' = \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} + v'_1, \qquad w' = \frac{\partial \varphi'}{\partial z'} + w'_1$$

seront donc connues, si l'on parvient à déterminer φ'.

Supposons que l'on se donne la composante normale de la vitesse

$$u' \cos \alpha' + v' \cos \beta' + w' \cos \gamma',$$

en un point de la surface Σ' du liquide au temps t'; les angles α', β', γ' de la normale intérieure n' avec les axes sont connus, puisque l'on connaît la forme nouvelle du liquide. Des équations (6') on déduit

$$\frac{d\varphi'}{dn'} = u' \cos \alpha' + v' \cos \beta' + w' \cos \gamma' - (u'_1 \cos \alpha' + v'_1 \cos \beta' + w'_1 \cos \gamma').$$

Cette formule détermine la dérivée de φ' suivant la normale.

Supposons que l'on connaisse la pression p au temps t en un autre point de la surface Σ du liquide. Reportons-nous aux équations générales de l'Hydrodynamique, que nous écrirons

$$\frac{\partial (F - p)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + D(u),$$

$$\frac{\partial (F - p)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + D(v),$$

$$\frac{\partial (F - p)}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + D(w),$$

en désignant par F la fonction des forces, par $D(u)$, $D(v)$, $D(w)$ les résultats de l'opération

$$u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z},$$

effectuée respectivement sur u, v et w, et supposant la densité égale à l'unité. En tenant compte des équations (6), on en déduit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F - p - \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} u_1 \, dx + v_1 \, dy + w_1 \, dz$$
$$- \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} D(u) \, dx + D(v) \, dy + D(w) \, dz.$$

en négligeant une fonction du temps qui n'influe pas sur les vitesses. Cette équation, dont le second membre est connu, détermine la dérivée qui figure au premier.

Observons, d'après le lemme, que, même au cas où le liquide abandonne le point (x, y, z), la fonction φ n'en a pas moins, au temps t', en ce point supposé fixe, une valeur $\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$. Ce point (x, y, z) venant occuper au temps t' la position connue (x', y', z'), la fonction φ prend en ce point la valeur désormais connue

$$\varphi' = \varphi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dt.$$

Alors même que la nouvelle position (x', y', z') ne fait pas partie de l'espace primitivement occupé par le fluide, la fonction φ n'y a pas moins, au temps t, une valeur déterminée

$$\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

On connaît donc, en tous les points de la surface Σ', soit la fonction φ' elle-même, soit sa dérivée $\frac{d\varphi'}{dn'}$. D'après un théorème connu, la valeur de φ' est alors déterminée en tous les points du liquide.

Il résulte de la démonstration que u', v', w' sont finies et continues, comme u, v, w. C'est d'ailleurs ce que supposent les équations de l'Hydrodynamique.

Remarque. — Au lieu de donner les valeurs initiales des vitesses, il suffit de donner les rotations initiales et les valeurs initiales des composantes normales des vitesses à la surface.

PERCUSSIONS

ET

EXPLOSIONS DANS LES LIQUIDES[1].

I. — Principe général de la théorie des percussions.

Le principe de Hamilton embrasse toute la dynamique des forces ordinaires. Son importance tient à la généralité de son expression analytique, qui permet d'écrire immédiatement en coordonnées quelconques les équations différentielles du mouvement d'un système. Il est utile de rechercher dans le cas des percussions le principe corrélatif de celui de Hamilton.

Un système matériel étant en mouvement, on peut faire varier brusquement les vitesses de trois manières différentes : 1° en établissant de nouvelles liaisons qui ne contrarient pas les liaisons primitives; 2° en agissant par percussion sur certains points; 3° en faisant agir simultanément ces deux causes de perturbation.

Supposons le système rapporté à trois axes rectangulaires. Soient m la masse d'un point; a_0, b_0, c_0 sa vitesse primitive; X, Y, Z, la percussion qu'on exerce sur lui; a, b, c la vitesse qui en résulte; $-u = a_0 - a$, $-v = b_0 - b$, $-w = c_0 - c$ la vitesse *perdue;* α, β, γ une vitesse virtuelle compatible avec les anciennes et avec les nouvelles liaisons. Le principe de d'Alembert donne

$$\sum m(u\alpha + v\beta + w\gamma) = \sum (X\alpha + Y\beta + Z\gamma),$$

---

[1] Ce Mémoire constitue le développement d'une Note *Sur les explosions au sein des liquides,* publiée par l'auteur en 1887 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CV, p. 61), et qui a été fondue dans le présent texte.

équation où ne figurent que les percussions extérieures. On peut l'écrire

$$(1)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum m[(u+\alpha)^2+(v+\beta)^2+(w+\gamma)^2]-\frac{1}{2}\sum m(u^2+v^2+w^2)\\ &\quad=\frac{1}{2}\sum m(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\sum(X\alpha+Y\beta+Z\gamma).\end{aligned}\right.$$

L'équation (1) définit le mouvement *naturel* du système après la percussion. On peut concevoir un mouvement *contraint*, obtenu en adjoignant aux nouvelles liaisons d'autres liaisons encore, non contradictoires avec celles-ci. Le point m prend alors la vitesse a', b', c' et *perd* la vitesse

$$-u'=a_0-a',\qquad -v'=b_0-b',\qquad -w'=c_0-c'.$$

D'après cela, les liaisons étant supposées indépendantes du temps, on peut prendre α, β, γ égaux à a, b, c et aussi à a', b', c'. L'équation (1) étant linéaire et homogène par rapport aux composantes des vitesses virtuelles, on y satisfait encore en prenant α, β, γ égaux aux différences

$$a'-a=u'-u,\qquad b'-b=v'-v,\qquad c'-c=w'-w.$$

Elle devient alors

$$(2)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum m(u^2+v^2+w^2)-\sum(Xu+Yv+Zw)\\ &\quad=\frac{1}{2}\sum m(u'^2+v'^2+w'^2)-\sum(Xu'+Yv'+Zw')\\ &\qquad\qquad-\frac{1}{2}\sum m[(u'-u)^2+(v'-v)^2+(w'-w)^2].\end{aligned}\right.$$

Désignons par P la percussion dont les composantes sont X, Y, Z; par $-p$ la vitesse *perdue*, dont les composantes sont $-u$, $-v$, $-w$. L'équation précédente exprime que *la quantité*

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\sum mp^2-\sum Pp\cos(P,p)$$

est minima dans le mouvement naturel. Tel est le principe que nous voulions établir. Si l'on introduit les coordonnées q_i de Lagrange, que l'on désigne par T la force vive correspondant aux vitesses perdues, par P_i la composante de P suivant la direction

de q'_i, la quantité à rendre minima est $T - \Sigma P_i q'_i$. Les q_i ne changeant pas pendant la percussion, on obtient immédiatement pour les équations du mouvement

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = P_i. \tag{4}$$

Fréquemment, et en particulier lorsque les données et les inconnues sont de nature purement cinématique, le travail $\sum Pp\cos(P, p)$ reste invariable lorsqu'on passe du mouvement *naturel* au mouvement *contraint*. Il suffit alors d'exprimer que *la force vive correspondant aux vitesses perdues est minima*. Voici trois cas remarquables et très généraux où ce fait se produit :

1° De nouvelles liaisons sont brusquement introduites, sans qu'aucune percussion soit exercée : alors $P = 0$. Exemple : choc des corps libres;

2° Certains points reçoivent des percussions propres à leur communiquer des vitesses *données* en grandeur et direction :

$$p' = p, \qquad \cos(P, p') = \cos(P, p).$$

Les autres points ne sont pas frappés directement. C'est dans ce cas, avec l'hypothèse restrictive que le système part du repos, que MM. Thomson et Tait ont énoncé, dans leur *Traité de Philosophie naturelle,* le principe de la force vive minima;

3° Chacun des points frappés directement reçoit une percussion de direction connue, mais de grandeur inconnue, qui lui communique une vitesse dont la composante suivant cette percussion est seule donnée : $p\cos(P,p) = p'\cos(P,p')$.

Les trois circonstances relatées peuvent d'ailleurs se produire simultanément.

Avant d'appliquer ces principes aux liquides, nous étudierons le *choc de deux corps libres*. Prenons pour origine le point de contact, pour plan des xy le plan tangent commun, pour axe des z la normale commune.

Soient $-u$, $-v$, $-w$ les composantes de la *vitesse perdue* pour le premier corps, p, q, r celles de la *rotation perdue;* soient $-u'$, $-v'$, $-w'$, p', q', r' les composantes analogues pour le second corps.

La vitesse d'un point $m(x, y, z)$ du premier corps est

$$u + qz - ry, \qquad v + rx - pz, \qquad w + py - qx,$$

Le double de la force vive correspondant aux vitesses perdues par le système des deux corps de masses M et M' est

$$\begin{aligned}2\mathrm{T} = {} & \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 - 2\mathrm{D}qr - 2\mathrm{E}rp - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{M}(u^2 + v^2 + w^2) \\ & + 2\mathrm{M}(z_1 q - y_1 r)u + 2\mathrm{M}(x_1 r - z_1 p)v + 2\mathrm{M}(y_1 p - x_1 q)w \\ & + \mathrm{A}'p'^2 + \mathrm{B}'q'^2 + \mathrm{C}'r'^2 - 2\mathrm{D}'q'r' - 2\mathrm{E}'r'p' - 2\mathrm{F}'p'q' + \mathrm{M}'(u'^2 + v'^2 + w'^2) \\ & + 2\mathrm{M}'(z'_1 q' - y'_1 r')u' + 2\mathrm{M}'(x'_1 r' - z'_1 p')v' + 2\mathrm{M}'(y'_1 p' - x'_1 q')w',\end{aligned}$$

si l'on pose, pour le premier corps,

$$\begin{array}{lll} \sum m(y^2 + z^2) = \mathrm{A}, & \sum myz = \mathrm{D}, & \sum mx = \mathrm{M}x_1, \\ \sum m(z^2 + x^2) = \mathrm{B}, & \sum mzx = \mathrm{E}, & \sum my = \mathrm{M}y_1, \\ \sum m(x^2 + y^2) = \mathrm{C}, & \sum mxy = \mathrm{F}, & \sum mz = \mathrm{M}z_1 \end{array}$$

et si l'on appelle $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \mathrm{D}', \mathrm{E}', \mathrm{F}'$, $\mathrm{M}'x'_1$, $\mathrm{M}'y'_1$, $\mathrm{M}'z'_1$ les quantités analogues pour le second corps.

Si, d'ailleurs, on désigne par c_0, c et c'_0, c' les composantes normales des vitesses au point de contact avant et après le choc, par e une constante, nulle dans le cas des corps mous, égale à 1 dans le cas des corps parfaitement élastiques, on a

$$c - c' = -e(c_0 - c'_0),$$

d'où, en retranchant de part et d'autre $c_0 - c'_0$,

$$w - w' = -(1 + e)(c_0 - c'_0).$$

Si l'on exprime que $2\mathrm{T}$ est minimum, en tenant compte de cette dernière relation, on obtient, pour déterminer les douze inconnues $u, v, w, p, q, r, u', v', w', p', q', r'$, les douze équations du premier degré,

$$\begin{array}{ll} \mathrm{A}p - \mathrm{E}r - \mathrm{F}q - \mathrm{M}z_1 v + \mathrm{M}y_1 w = 0, & \mathrm{A}'p' - \mathrm{E}'r' - \mathrm{F}'q' - \mathrm{M}'z'_1 v' + \mathrm{M}'y'_1 w' = 0, \\ \mathrm{B}q - \mathrm{F}p - \mathrm{D}r - \mathrm{M}x_1 w + \mathrm{M}z_1 u = 0, & \mathrm{B}'q' - \mathrm{F}'p' - \mathrm{D}'r' - \mathrm{M}'x'_1 w' + \mathrm{M}'z'_1 u' = 0, \\ \mathrm{C}r - \mathrm{D}q - \mathrm{E}p - \mathrm{M}y_1 u + \mathrm{M}x_1 v = 0, & \mathrm{C}'r' - \mathrm{D}'q' - \mathrm{E}'p' - \mathrm{M}'y'_1 u' + \mathrm{M}'x'_1 v' = 0, \\ \mathrm{M}u + \mathrm{M}z_1 q - \mathrm{M}y_1 r = 0, & \mathrm{M}'u' + \mathrm{M}'z'_1 q' - \mathrm{M}'y'_1 r' = 0, \\ \mathrm{M}v + \mathrm{M}x_1 r - \mathrm{M}z_1 p = 0, & \mathrm{M}'v' + \mathrm{M}'x'_1 r' - \mathrm{M}'z'_1 p' = 0, \end{array}$$

$$\mathrm{M}w + \mathrm{M}y_1 p - \mathrm{M}x_1 q + \mathrm{M}'w + \mathrm{M}'y'_1 p' - \mathrm{M}'x'_1 q' = 0,$$

$$w - w' = -(1 + e)(c_0 - c'_0).$$

La forme de ces équations montre que les douze composantes des vitesses perdues sont proportionnelles à la vitesse relative avant le choc $(c_0 - c'_0)$; leurs rapports mutuels ne dépendent que de la forme et de la situation relative des deux corps.

Lorsque les deux corps se choquent de façon que les axes principaux d'inertie relatifs à leurs centres de gravité constituent deux systèmes parallèles, deux de ces axes coïncidant avec la normale commune, on a

$$D = E = F = x_1 = y_1 = 0.$$

Les équations précédentes montrent que toutes les composantes des vitesses perdues sont nulles, sauf w et w'. Il n'y a de changé que les vitesses *normales* de translation.

II. - Percussions à la surface d'un fluide incompressible.

Soient dS un élément de la surface, qui reçoit la percussion *normale* P, n la normale intérieure, $-u$, $-v$, $-w$ les composantes suivant trois axes rectangulaires de la vitesse perdue en un point quelconque x, y, z. Il faut rendre minima la somme des deux intégrales

$$(5) \qquad -\int Pp\cos(n,p)\,dS + \frac{1}{2}\iiint(u^2 + v^2 + w^2)\,dx\,dy\,dz.$$

On suppose la densité du fluide égale à 1. L'équation d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

variée, puis multipliée par un facteur indéterminé φ, fonction de x, y, z, multipliée ensuite par $dx\,dy\,dz$, intégrée dans toute l'étendue du liquide et, enfin, ajoutée à l'équation obtenue en égalant à zéro la variation de (5), donne

$$0 = -\int P\,\delta[p\cos(n,p)]\,dS + \iiint(u\,\delta u + v\,\delta v + w\,\delta w)\,dx\,dy\,dz$$
$$+ \iiint\varphi\left(\frac{\partial\,\delta u}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta v}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Celle-ci, transformée d'après les principes du calcul des variations, devient

$$o = \int (\varphi - P)\,\delta[p\cos(n,p)]\,dS$$
$$+\iiint \left[\left(u - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\delta u + \left(v - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\delta v + \left(w - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\delta w\right] dx\,dy\,dz.$$

Les deux intégrales qui y figurent doivent être séparément nulles. Occupons-nous d'abord de la première. En certaines régions de la surface, la composante normale de la vitesse est donnée : on a pour ces régions

$$\delta[p\cos(n,p)] = o;$$

pour la portion restante, c'est la percussion P qui est donnée : on doit prendre $\varphi = P$.

Pour que la seconde intégrale soit nulle, il faut que l'on ait

$$(6)\qquad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

On en conclut, à la surface,

$$(7)\qquad p\cos(n,p) = \frac{d\varphi}{dn}.$$

L'équation d'incompressibilité donne la condition

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = o,$$

qui, jointe aux conditions à la surface

$$\varphi = P,\qquad \frac{d\varphi}{dn} = p\cos(n,p),$$

détermine complètement φ. Les équations (6) font alors connaître u, v, w.

Si l'on désigne par ω_x, ω_y, ω_z les composantes de la rotation en un point du liquide après la percussion, par ω_x^0, ω_y^0, ω_z^0 ces mêmes composantes avant la percussion, on a, comme on sait,

$$2(\omega_x - \omega_x^0) = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},\qquad 2(\omega_y - \omega_y^0) = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$
$$2(\omega_z - \omega_z^0) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

et les équations (6) montrent que

$$\omega_x = \omega_x^0, \qquad \omega_y = \omega_y^0, \qquad \omega_z = \omega_z^0.$$

Ainsi, par l'effet de percussions dans un liquide, les rotations ne changent ni en direction ni en grandeur. En particulier, si le liquide part du repos, les percussions ne font pas naître de rotations. Ce dernier théorème est dû à MM. Thomson et Tait.

On voit que le problème des percussions dans un liquide revient à la détermination de la fonction φ. Les vitesses perdues sont normales aux surfaces de niveau $\varphi = \text{const}$. Voici deux exemples de cette détermination, qui montrent bien l'analogie, au point de vue analytique, de différents ordres de phénomènes physiques.

I. Un liquide, en repos ou en mouvement, est limité par une surface libre plane, invariable, indéfinie. Sur une portion S de la surface libre, on exerce une percussion uniforme P.

Concevons que sur la surface S on ait étendu une couche magnétique d'intensité constante $\frac{P}{2\pi}$. On sait que le potentiel de cette couche en un point d'où l'on voit la surface S sous l'angle solide ω est $\frac{P\omega}{2\pi}$. Ce potentiel remplit bien les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction φ : il est nul à l'infini, égal à P en un point quelconque de S, égal à zéro sur tout le reste de la surface libre. On a donc

$$\varphi = P\frac{\omega}{2\pi}. \tag{8}$$

Si la partie ébranlée S est une bande indéfinie à bords rectilignes et parallèles, les surfaces de niveau sont des portions de cylindres circulaires passant par les deux bords. Les lignes de flux sont des demi-cercles normaux à ces cylindres dont les diamètres se terminent aux points conjugués des points où le plan de chaque demi-cercle coupe les bords de la bande. Le diagramme, facile à imaginer, donne une idée très nette du mouvement. Le liquide est chassé de la partie ébranlée de la surface vers la partie non ébranlée, qui se soulève normalement; il tourne autour de chaque bord avec une vitesse infinie : cette con-

clusion montre combien l'hypothèse d'un fluide sans frottement est éloignée de la réalité.

II. La surface libre S reçoit une percussion uniforme; le reste de la surface terminale est limité par une paroi fixe.

Concevons que sur S on ait étendu une couche d'électricité en équilibre, au potentiel constant P. Il suffit de prendre φ égal au potentiel de cette couche en un point quelconque, car φ sera nul à l'infini, égal à P en tout point de S, et $\frac{d\varphi}{dn}$ sera nul en tout point de la paroi fixe.

On sait résoudre ce problème lorsque la partie ébranlée S a la forme elliptique. Les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{u}=0, \tag{9}$$

homofocaux à l'ellipse donnée. Les lignes de flux sont les lignes de courbure des hyperboloïdes homofocaux. Le liquide est chassé de la partie ébranlée sous la paroi, avec une vitesse infiniment grande près des bords. On a

$$\varphi = P\frac{\displaystyle\int_u^\infty \frac{dS}{\sqrt{S(a^2+S)(b^2+S)}}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dS}{\sqrt{S(a^2+S)(b^2+S)}}}. \tag{10}$$

III. — Explosions au sein d'un liquide; équations générales.

Considérons une masse liquide en repos, illimitée ou bornée par des surfaces libres et des parois fixes. Dans ce liquide homogène, de densité μ, plongent ou flottent des corps solides; pour plus de simplicité, nous supposerons qu'il n'y en a qu'un, dont nous désignerons la masse par M et la surface immergée par S. Une sphère, de rayon infiniment petit ε, éclate au sein du liquide avec une intensité de percussion $\mu m:\varepsilon$, uniforme en tous les points de sa surface σ. On demande :

1° La vitesse (u, v, w, p, q, r) imprimée au solide par l'explosion;

2° La percussion $\mu\Phi$ en tout point du liquide.

On sait que Φ satisfait à l'équation potentielle

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

et que les composantes de la vitesse en un point du fluide sont

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Représentons par n et N les normales extérieures à la petite sphère σ et au solide S, par T la demi-force vive du liquide, par T_1 celle du solide. En vertu du principe général établi au début, et qui contient toute la théorie des percussions, il s'agit de rendre minima l'expression

$$(11) \qquad \Omega = T + T_1 + \frac{\mu m}{\varepsilon}\int_\sigma \frac{d\Phi}{dn}\,d\sigma.$$

La demi-force vive du liquide

$$T = \frac{\mu}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] dx\,ay\,dz$$

a pour valeur, en vertu d'une transformation bien connue,

$$(12) \qquad T = -\frac{\mu}{2}\int_S \Phi\frac{d\Phi}{dN}\,dS - \frac{\mu}{2}\int_\sigma \Phi\frac{d\Phi}{dn}\,d\sigma,$$

de sorte que l'expression à rendre minima devient

$$\Omega = T_1 - \frac{\mu}{2}\int_S \Phi\frac{d\Phi}{dN}\,dS + \frac{\mu}{2}\int_\sigma\left(\frac{2m}{\varepsilon} - \Phi\right)\frac{d\Phi}{dn}\,d\sigma.$$

Quant à la fonction Φ, nous poserons

$$(13) \qquad \Phi = \varphi + \psi$$

et nous satisferons à toutes les conditions que Φ doit remplir en assujettissant φ et ψ aux suivantes :

1° Dans tout le liquide, $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$; 2° à l'infini, φ et ψ sont infiniment petits; 3° à la surface libre, $\varphi = \psi = 0$; 4° sur les parois fixes, les dérivées de φ et de ψ suivant la normale sont

nulles; 5° à la surface du solide S, on a

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dN} = (u + qz - ry)\cos(N, x) + (v + rx - pz)\cos(N, y) \\ + (w + py - qx)\cos(N, z), \end{aligned} \right.$$

$$(15)\qquad \frac{d\psi}{dN} = 0;$$

6° au centre d'explosion, la fonction φ et ses dérivées sont continues; la fonction ψ est infinie comme l'inverse de la distance à ce centre ($\lim \varepsilon\psi = m$).

On voit que φ est la fonction introduite par Dirichlet dans son étude du mouvement d'un solide au sein d'un liquide et que Clebsch a déterminée pour l'ellipsoïde; c'est le potentiel qui donnerait la vitesse du liquide, si l'on imprimait directement au solide la vitesse inconnue (u, v, w, p, q, r). La fonction ψ est celle qui déterminerait la percussion, si le solide S était fixe.

Nous allons transformer l'expression Ω qu'il s'agit de rendre minima. Occupons-nous d'abord de la seconde des intégrales qui y figurent et qui est relative à la petite sphère σ. Au centre d'explosion, ψ devient infiniment grand comme $m\rho^{-1}$. On peut donc écrire

$$\psi = \frac{m}{\rho} + Y_0 + Y_1\rho + \ldots,$$

les Y_n étant des fonctions sphériques. De là résulte

$$\Phi = \varphi + \psi = \frac{m}{\rho} + \varphi + Y_0 + Y_1\rho + \ldots, \qquad \frac{d\Phi}{dn} = -\frac{m}{\rho^2} + \ldots$$

Pour avoir les points de la petite sphère, il faut faire $\rho = \varepsilon$, ce qui donne

$$\int_\sigma \left(\frac{2m}{\varepsilon} - \Phi\right)\frac{d\Phi}{dn}\,d\sigma = \int_\sigma \left(\frac{m}{\varepsilon} - \varphi - Y_0 - Y_1\varepsilon - \ldots\right)\left(-\frac{m}{\varepsilon^2} + \ldots\right)d\sigma.$$

Si l'on remarque que la surface totale σ de la petite sphère est égale à $4\pi\varepsilon^2$ et si l'on néglige les termes qui sont infiniment petits avec ε, il reste

$$(16)\qquad \int_\sigma \left(\frac{2m}{\varepsilon} - \Phi\right)\frac{d\Phi}{dn}\,d\sigma = -\frac{4\pi m^2}{\varepsilon} + 4\pi m(\varphi' + Y_0),$$

φ' désignant la valeur $\varphi(x', y', z')$ que la fonction φ acquiert au centre d'explosion (x', y', z'); alors Ω devient

$$\Omega = T_1 - \frac{\mu}{2}\int_S \Phi \frac{d\Phi}{dN} + 2\pi\mu m\left(\varphi' + Y_0 - \frac{m}{\varepsilon}\right). \tag{17}$$

Mais on a identiquement

$$\int_S \Phi \frac{d\Phi}{dN} dS = \int_S (\varphi + \psi)\left(\frac{d\varphi}{dN} + \frac{d\psi}{dN}\right) dS,$$

ou, à cause de la condition (15),

$$\int_S \Phi \frac{d\Phi}{dN} dS = \int_S \varphi \frac{d\varphi}{dN} dS + \int_S \psi \frac{d\varphi}{dN} dS, \tag{18}$$

de sorte que, si l'on pose

$$\mathfrak{C} = T_1 - \frac{\mu}{2}\int_S \varphi \frac{d\varphi}{dN} dS, \tag{19}$$

l'expression à rendre minima devient

$$\Omega = \mathfrak{C} + \frac{\mu}{2}\left(4\pi m\varphi' - \int_S \psi \frac{d\varphi}{dN} dS\right) + 2\pi m\mu\left(Y_0 - \frac{m}{\varepsilon}\right).$$

La seconde parenthèse se compose de deux termes indépendants de u, v, w, p, q, r. Si on la représente par C, on aura

$$\Omega = \mathfrak{C} + \frac{\mu}{2}\left(4\pi m\varphi' - \int_S \psi \frac{d\varphi}{dN} dS\right) + C. \tag{20}$$

Pour évaluer l'intégrale qui subsiste au second membre, nous appliquerons le théorème de Green aux deux fonctions φ et ψ en prenant comme champ d'intégration tout l'espace occupé par le liquide. A raison des trois premières conditions imposées à ces fonctions, le théorème de Green donne simplement

$$\int_S \varphi \frac{d\psi}{dN} dS - \int_S \psi \frac{d\varphi}{dN} dS = \int_\sigma \psi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma - \int_\sigma \varphi \frac{d\psi}{dn} d\sigma.$$

Mais, en vertu de la condition (15), la première intégrale du premier membre est nulle. A l'intérieur de la petite sphère, on a

$$\psi = \frac{m}{\rho} + \ldots, \qquad \frac{d\psi}{dn} = -\frac{m}{\rho^2} + \ldots.$$

Par suite, la première intégrale du second membre est infiniment petite comme ε, et la seconde se réduit à

$$-\varphi'\frac{m}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 = -4\pi m\varphi'.$$

Nous arrivons donc à la formule fondamentale ([1])

$$\int_S \psi\frac{d\varphi}{dN}\,dS = -4\pi m\varphi', \tag{21}$$

qui va nous donner six relations distinctes. Rappelons, en effet, que la fonction φ de Dirichlet est linéaire et homogène par rapport aux six indéterminées u, v, w, p, q, r

$$\varphi = \varphi_1 u + \varphi_2 v + \varphi_3 w + \varphi_4 p + \varphi_5 q + \varphi_6 r;$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ satisfont, dans tout le liquide, à l'infini, à la surface libre et sur les parois fixes, aux mêmes conditions que φ; à la surface du corps S, leurs dérivées χ_i suivant la normale extérieure ont respectivement pour valeurs

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned} \chi_1 &= \cos(N, x), \\ \chi_2 &= \cos(N, y), \\ \chi_3 &= \cos(N, z), \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} \chi_4 &= y\cos(N, z) - z\cos(N, y), \\ \chi_5 &= z\cos(N, x) - x\cos(N, z), \\ \chi_6 &= x\cos(N, y) - y\cos(N, x). \end{aligned}\right\}\quad(22')$$

A raison de l'indépendance des six arguments u, v, w, p, q, r, la relation (21) entraîne les suivantes :

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned} 4\pi m\varphi'_1 &= -\int_S \psi\chi_1\,dS, & 4\pi m\varphi'_4 &= -\int_S \psi\chi_4\,dS, \\ 4\pi m\varphi'_2 &= -\int_S \psi\chi_2\,dS, & 4\pi m\varphi'_5 &= -\int_S \psi\chi_5\,dS, \\ 4\pi m\varphi'_3 &= -\int_S \psi\chi_3\,dS, & 4\pi m\varphi'_6 &= -\int_S \psi\chi_6\,dS. \end{aligned}\right.$$

Ces équations montrent que *la connaissance de la seule fonction ψ, pour toutes les positions x', y', z' du centre d'explosion, suffirait pour résoudre complètement le problème proposé,*

([1]) Si le centre d'explosion est à la surface du solide, le second membre n'est plus égal à $-4\pi m\varphi'$, mais à $-2\pi m\varphi'$.

puisque φ' serait alors déterminée en fonction des coordonnées (x', y', z') d'un point quelconque du liquide.

Inversement, si l'on cherche seulement la vitesse imprimée au solide, sans se préoccuper du mouvement du liquide, la connaissance de la fonction φ dispense de déterminer ψ. Pour le montrer, substituons dans l'expression (20) de Ω l'intégrale que fait connaître la formule fondamentale (21); nous arriverons à ce résultat très simple

$$(24) \qquad \Omega = \mathfrak{S} + 4\pi m \mu \varphi' + C.$$

Pour rendre minima la fonction Ω, égalons à zéro ses dérivées partielles prises par rapport aux six variables $u, v, \ldots, r$. Nous trouvons ainsi

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} = -4\pi m \mu \varphi'_1, & \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial p} = -4\pi m \mu \varphi'_4, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} = -4\pi m \mu \varphi'_2, & \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial q} = -4\pi m \mu \varphi'_5, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = -4\pi m \mu \varphi'_3, & \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial r} = -4\pi m \mu \varphi'_6. \end{array} \right.$$

Comme la fonction $\mathfrak{S}$ est homogène et du second degré en $u, v, \ldots, r$, on a là six équations linéaires par rapport à ces six inconnues, qui sont ainsi déterminées, *directement,* sans qu'il soit nécessaire de connaître ψ, si la fonction φ est connue, et *par l'intermédiaire des relations* (23) quand ψ est déterminé ([1]).

Cas particulier. — Supposons qu'il n'y ait *pas de corps* immergé et que le liquide, indéfini dans tous les sens, soit limité par une surface libre plane. La fonction φ disparaît et la percussion ψ, en chaque point P du liquide, peut être exprimée par la formule très simple

$$\psi = \frac{m}{\rho} - \frac{m}{\rho_1},$$

où ρ et ρ_1 désignent les distances du point P au centre d'explosion

---

([1]) La Note des *Comptes rendus,* dont le présent Mémoire est le développement, contient en outre l'indication suivante :

« Les parois fixes produisent des effets de répercussion que l'on peut calculer à l'aide du principe des images. »

et au point symétrique du centre d'explosion par rapport à la surface libre. En effet, la fonction définie de cette manière satisfait à l'équation $\Delta\psi = 0$ et s'annule en tous les points de la surface libre, ainsi qu'à l'infini.

IV. — Explosion dans un liquide sous un corps flottant.

Nous allons appliquer la théorie précédente à l'étude des explosions dans un liquide sous un corps flottant.

Le solide S étant supposé flotter à la surface libre, horizontale, d'un liquide indéfini de densité μ, la petite sphère σ éclate dans le liquide, avec la même intensité de percussion $\mu m : \varepsilon$ en tous les points de sa surface. On demande le mouvement imprimé au corps flottant par l'explosion.

Nous supposerons que le solide flottant admet un axe de symétrie vertical, et que le centre d'explosion est situé sur cet axe, qui sera pris pour axe des z. Le mouvement imprimé au corps solide se réduit nécessairement à une translation verticale dont nous représenterons la vitesse par w. Par suite, la fonction de Dirichlet et la demi-force vive du solide ont respectivement pour expression

$$\varphi = w\varphi_3, \qquad T_1 = \frac{M w^2}{2},$$

φ_3 étant le potentiel des vitesses qui correspondrait à une translation uniforme du corps S au sein d'un fluide, indéfini *dans tous les sens*, la translation ayant lieu parallèlement à l'axe des z avec une vitesse égale à l'unité.

La fonction $\mathfrak{T}$ se réduit à

$$\mathfrak{T} = \left(M - \mu \int_S \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dN} dS\right) \frac{w^2}{2}.$$

On a donc

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} = \left(M - \mu \int_S \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dN} dS\right) w,$$

et, en vertu de l'une des équations (25),

$$w = \frac{4\pi m \varphi'_3}{\displaystyle\int_S \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dN} dS - \frac{M}{\mu}}. \tag{26}$$

Le problème est ramené à la détermination de la fonction φ_3.

On peut mettre ϖ sous une forme un peu différente, en introduisant la projection ds de l'élément dS sur le plan horizontal qui termine le liquide. On a, en effet,

$$ds = \cos(N, z)\, dS.$$

Or, en vertu de l'une des équations (22), on a aussi

$$\frac{d\varphi_3}{dN} = \cos(N, z);$$

de là résulte

$$\frac{d\varphi_3}{dN}\, dS = ds,$$

d'où l'expression nouvelle de ϖ

$$(27) \qquad \varpi = \frac{4\pi m \varphi_3'}{\int_s \varphi_3\, ds - \frac{M}{\mu}}.$$

L'intégration s'étend à toute l'aire s de la section déterminée dans le corps flottant par le plan de sa ligne de flottaison.

Remarque. — On pourrait arriver directement à l'expression de ϖ, en égalant la quantité de mouvement acquise par le solide, dont la masse est M, à la résultante des percussions éprouvées par sa surface. L'intensité de la percussion étant

$$\mu\Phi = \mu(\varphi + \psi) = \mu \varpi \varphi_3 + \mu\psi,$$

on a immédiatement l'égalité

$$M\varpi = \mu\varpi \int_S \varphi_3 \cos(N, z)\, dS + \mu \int_S \psi \cos(N, z)\, dS$$

qui, en vertu de l'une des relations (22), peut s'écrire

$$M\varpi = \mu\varpi \int_S \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dN}\, dS + \mu \int_S \psi \frac{d\varphi_3}{dN}\, dS.$$

On en déduit

$$(28) \qquad \varpi = -\frac{\int_S \psi \frac{d\varphi_3}{dN}\, dS}{\int_S \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dN}\, dS - \frac{M}{\mu}}.$$

Or, en appliquant le théorème de Green aux deux fonctions potentielles φ et ψ, nous avons obtenu la relation fondamentale (21), qui devient ici

$$\int_S \psi \frac{d\varphi_3}{dN} dS = -4\pi m \varphi'_3;$$

donc les valeurs (26) et (28) ne sont pas distinctes.

V. — Application à l'ellipsoïde flottant.

Soit un ellipsoïde ayant pour ligne de flottaison l'ellipse principale de demi-axes a et b; le demi-axe c est vertical. La fonction φ_3, qui a été déterminée par Clebsch, a pour expression

$$(29) \qquad \varphi_3 = -\frac{abcz}{2-C} \int_\omega^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

la fonction ω et la constante C étant définies par les relations

$$(30) \qquad \frac{x^2}{a^2+\omega} + \frac{y^2}{b^2+\omega} + \frac{z^3}{c^2+\omega} = 1,$$

$$(31) \qquad C = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

En faisant $\omega = 0$, on obtient la valeur de φ_3 sur la surface

$$(32) \qquad \varphi_3 = -\frac{Cz}{2-C},$$

d'où résulte

$$(33) \qquad \int_s \varphi_3 ds = -\frac{C}{2-C} \int_s z\, ds = -\frac{C}{2-C} \frac{2\pi abc}{3}.$$

Au centre d'explosion ($x = 0$, $y = 0$, $z = h$), on a

$$\omega = h^2 - c^2;$$

par suite, la valeur de φ_3 en ce point est

$$\varphi'_3 = -\frac{2abch}{2-C} \int_{h^2-c^2}^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

que le changement de variables $\lambda = t^2 - c^2$ permet d'écrire ainsi :

$$(34) \qquad \varphi'_3 = -\frac{2abch}{2-C}\int_h^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{(a^2-c^2+t^2)(b^2-c^2+t^2)}}.$$

D'ailleurs, la masse M de l'ellipsoïde flottant est égale à la masse $\frac{2}{3}\pi abc\mu$ du fluide déplacé. Toutes ces valeurs, substituées dans la formule générale (27), donnent

$$(35) \qquad w = 6mh\int_h^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{(a^2-c^2+t^2)(b^2-c^2+t^2)}}.$$

Ainsi, la vitesse avec laquelle l'ellipsoïde est projeté en l'air ne dépend que du coefficient de percussion m, de la profondeur h du centre d'explosion et des différences a^2-c^2, b^2-c^2, c'est-à-dire que, m et h une fois données, *elle est la même pour tous les ellipsoïdes homofocaux*.

Il va sans dire, d'ailleurs, que l'ellipsoïde peut être coupé au-dessus de la ligne de flottaison et creusé en forme de navire, de sorte que la question qui vient d'être résolue est un cas particulier du problème des torpilles sous-marines.

Ajoutons que la quadrature qui fait connaître w s'effectue aisément quand l'ellipsoïde est de révolution, ovaire ou planétaire.

VI. — Solution complète pour la sphère à demi immergée.

Dans le cas de la sphère ($a^2 = b^2 = c^2$), la formule (35) devient

$$(36) \qquad w = 6mh\int_h^\infty \frac{dt}{t^4} = \frac{2m}{h^2},$$

Donc, *quand une torpille éclate sous une sphère en repos, à demi immergée, en un point de la verticale de son centre, la vitesse avec laquelle la sphère est soulevée est indépendante de son rayon; elle est inversement proportionnelle au carré de la profondeur du centre d'explosion.*

La fonction φ_3 prend, dans le cas de la sphère, une forme très simple. En effet, la constante C est alors égale à $\frac{2}{3}$ et, si l'on désigne par l la distance d'un point du fluide au centre de la sphère

flottante, la limite inférieure ω de l'intégrale (29) dont dépend φ_3 est égale à $l^2 - a^2$, ce qui donne

$$(37) \qquad \varphi_3 = -\frac{3a^3 z}{4}\int_{l^2-a^2}^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{a^3 z}{2l^3}.$$

De ce résultat et de la formule (36) on déduit

$$(38) \qquad \varphi = w\varphi_3 = -\frac{ma^3 z}{h^2 l^3}.$$

Telle est, pour la sphère flottante, l'expression de la fonction de Dirichlet.

Quant à la fonction ψ, qui est unique, nous pouvons lui donner la forme

$$\psi = \psi_0(x, y, z) - \psi_0(x, y, -z),$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un point de l'espace, rapportées à trois axes rectangulaires passant par le centre O de la sphère flottante (Oz étant vertical et dirigé vers le bas). De la sorte ψ sera nul à la surface libre $z = 0$. Il restera à *déterminer une fonction potentielle* $\psi_0(x, y, z)$, *entière en dehors de la sphère, qui soit nulle à l'infini comme l'inverse de la distance à l'origine, infinie au centre d'explosion comme* $m\rho^{-1}$, *et telle que sur toute la sphère on ait* $\frac{d\psi_0}{dN} = 0$.

Voici comment on peut former une fonction ψ_0 satisfaisant à ces diverses conditions. Désignons par ρ, l et ρ' les distances d'un point quelconque $P(x, y, z)$ du liquide au centre d'explosion $A(x = y = 0, z = h)$, au centre O de la sphère et au conjugué $A'(x = y = 0, z = h')$ du centre d'explosion par rapport à la sphère. Les coordonnées h et h' sont liées par l'équation $hh' = a^2$. Cela étant, nous poserons

$$\psi_0 = \frac{m}{\rho} + mV,$$

et il faudra d'abord que l'on ait à la surface de la sphère

$$\frac{dV}{dN} = -\frac{d}{dN}\frac{1}{\rho}.$$

Or, le point P étant maintenant sur la sphère, si l'on désigne par α

l'angle de OP avec AP, et par α' celui de OP avec A′P, on aura

$$\frac{d}{dN}\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dN} = -\frac{\cos\alpha}{\rho^2}, \qquad \frac{d}{dN}\frac{1}{\rho'} = -\frac{1}{\rho'^2}\frac{d\rho'}{dN} = -\frac{\cos\alpha'}{\rho'^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2+\rho^2-h^2}{2a\rho}, \qquad \cos\alpha' = \frac{a^2+\rho'^2-h'^2}{2a\rho'}.$$

Mais la relation entre h et h' entraîne la similitude des triangles POA, POA′ et les égalités

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{h}{a} = \frac{a}{h'}.$$

Si l'on fait usage de ces dernières pour exprimer h et ρ en fonction de h' et ρ', on trouve aisément

$$\frac{dV}{dN} = -\frac{d}{dN}\frac{1}{\rho} = \frac{h'}{a}\left(\frac{d}{dN}\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{a\rho'}\right),$$

ce qui conduit à poser

$$V = \frac{h'}{a}\left(\frac{1}{\rho'} + U\right), \qquad \frac{dU}{dN} = \frac{1}{a\rho'}.$$

On est ainsi ramené à *déterminer une fonction potentielle* $U(x, y, z)$ *entière en dehors de la sphère, qui soit nulle à l'infini comme l'inverse de la distance à l'origine, et telle que sur toute la sphère on ait* $\frac{dU}{dN} = \frac{1}{a\rho'}$.

Voici comment on y arrive. Désignons par γ l'angle de OP avec la verticale : nous aurons

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\sqrt{l^2 - 2h'l\cos\gamma + h'^2}} = \frac{1}{l\sqrt{1 - 2\frac{h'}{l}\cos\gamma + \frac{h'^2}{l^2}}},$$

ou, en développant suivant les puissances de $\frac{1}{l}$,

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{l} + X_1\frac{h'}{l^2} + X_2\frac{h'^2}{l^3} + \ldots,$$

les coefficients X_n étant les polynomes de Legendre où la variable x est remplacée par $\cos\gamma$.

On peut, d'autre part, développer la fonction cherchée U de la

manière suivante :

$$U = \frac{Y_0}{l} + Y_1 \frac{h'}{l^2} + Y_2 \frac{h'^2}{l^3} + \ldots,$$

ce qui donnera

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -\frac{Y_0}{l^2} - 2Y_1 \frac{h'}{l^3} - 3Y_2 \frac{h'^2}{l^4} + \ldots.$$

Or nous voulons qu'à la surface de la sphère, c'est-à-dire pour $l = a$, cette dérivée soit égale à l'inverse de $a\rho'$, ce qui conduit à écrire

$$-\frac{Y_0}{a^2} - 2Y_1 \frac{h'}{a^3} - 3Y_2 \frac{h'^2}{a^4} - \ldots = \frac{1}{a^2} + X_1 \frac{h'}{a^3} + X_2 \frac{h'^2}{a^4} + \ldots.$$

En vertu de propositions connues, on conclut de là

$$-Y_0 = 1, \qquad -2Y_1 = X_1, \qquad -3Y_2 = X_2, \qquad \ldots,$$

et par suite aussi

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{X_0}{l^2} + X_1 \frac{h'}{l^3} + X_2 \frac{h'^2}{l^4} + \ldots = \frac{1}{l\rho'}.$$

En conséquence, la fonction cherchée U a pour expression

$$U = \int_\infty^l \frac{dl}{l\rho'} = \int_\infty^l \frac{dl}{l^2\sqrt{1 - 2\frac{h'}{l}\cos\gamma + \frac{h'^2}{l^2}}}.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$U = -\frac{1}{h'} \log \frac{h' - l\cos\gamma + \sqrt{h'^2 - 2lh'\cos\gamma + l^2}}{l - l\cos\gamma} = -\frac{1}{h'} \log \frac{\rho' - z + h'}{l - z}.$$

De là, remontant aux expressions de V et de ψ_0, on déduit

$$\psi_0(x, y, z) = \frac{m}{a}\left(\frac{a}{\rho} + \frac{h'}{\rho'} - \log \frac{\rho' - z + h'}{l - z}\right).$$

Si l'on change z en $-z$, la distance ρ se transforme dans la distance ρ_1 du point P au symétrique A_1 du centre d'explosion par rapport à la surface libre, et ρ' est remplacé par la distance ρ'_1 du point P au conjugué de A_1 par rapport à la sphère. Avec ces

notations, on trouve

$$\psi_0(x, y, -z) = \frac{m}{a}\left(\frac{a}{\rho_1} + \frac{h'}{\rho'_1} - \log\frac{\rho'_1 + z + h'}{l + z}\right)$$

et, par suite,

$$\psi = \frac{m}{a}\left(\frac{a}{\rho} + \frac{h'}{\rho'} - \log\frac{\rho' - z + h'}{l - z}\right) - \frac{m}{a}\left(\frac{a}{\rho_1} + \frac{h'}{\rho'_1} - \log\frac{\rho'_1 + z + h'}{l + z}\right).$$

Telle est l'expression de ψ; il suffit de l'ajouter à celle de φ fournie par l'équation (38) pour avoir le potentiel des vitesses, ce qui achève la solution.

VII. — Solution complète pour le disque circulaire.

Supposons d'abord le disque *elliptique*. Il faut faire $c = 0$ dans les formules (29) et (35), ce qui exige, pour la première, que l'on cherche ce que devient le rapport $\frac{c}{2 - C}$ lorsque c tend vers zéro. A cet effet, faisons dans la formule (31) le changement de variable $\lambda = t^2 - c^2$ déjà employé. Il viendra

$$C = 2abc\int_c^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{(a^2 - c^2 + t^2)(b^2 - c^2 + t^2)}}.$$

Intégrons par parties; nous aurons

$$C = 2abc\left[\frac{1}{abc} - \int_c^\infty \frac{(a^2 + b^2 - 2c^2 + 2t^2)\,dt}{(a^2 - c^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}(b^2 - c^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

On déduit immédiatement de là

$$(39) \qquad \lim_{c=0} \frac{2 - C}{c} = 2ab\int_0^\infty \frac{(a^2 + b^2 + 2t^2)\,dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}(b^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour obtenir w et φ_3 quand le disque est *circulaire*, il suffit d'introduire les hypothèses $b = a$, $c = 0$ dans les formules du paragraphe précédent relatives à l'ellipsoïde. On trouve immédiatement

$$(35)' \qquad w = 6mh\int_h^\infty \frac{dt}{t^2(a^2 + t^2)} = \frac{6m}{a^2}\left(1 - \frac{h}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{a}{h}\right).$$

Afin de voir ce que devient l'expression de φ_3, nous ferons usage de la relation (39), qui, particularisée par l'hypothèse $b = a$, donne

$$\lim_{c=0} \frac{2 - C}{c} = 4a^2 \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2 + t^2)^2} = \frac{\pi}{a}.$$

Par suite, la formule (29) devient

$$\varphi_3 = -\frac{a^3 z}{\pi} \int_\omega^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\lambda\sqrt{\lambda}},$$

ω étant la racine positive (ou nulle) de l'équation

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + \omega} + \frac{z^2}{\omega} = 1.$$

Si l'on fait $\lambda = t^2$, l'expression de φ_3 devient

$$\varphi_3 = -\frac{2a^3 z}{\pi} \int_{\sqrt{\omega}}^\infty \frac{dt}{t^2(a^2 + t^2)} = \frac{2z}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{a}{\sqrt{\omega}} - \frac{a}{\sqrt{\omega}}\right),$$

ce que l'on peut, en posant $\omega = a^2\tau^2$, écrire

(29)' $$\varphi_3 = \frac{2z}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau}\right),$$

τ étant la racine positive (ou nulle) de l'équation

(30)' $$\frac{x^2 + y^2}{1 + \tau^2} + \frac{z^2}{\tau^2} = a^2,$$

Pour connaître la percussion

$$\mu\Phi = \mu(\psi + w\varphi_3)$$

en tout point du liquide, il ne reste plus qu'à déterminer ψ.

D'après les conditions qui lui sont imposées, ψ est le potentiel des actions qu'exerce sur un point de l'espace le système formé par un plan conducteur indéfini, percé d'une ouverture circulaire de rayon a, au potentiel zéro, et par deux masses égales m placées symétriquement sur l'axe de figure, aux distances $-h$ et $+h$ du plan. M. Beltrami a donné sous forme explicite le potentiel d'un disque de rayon a, influencé par une masse m', placée à la distance h' sur l'axe de figure. D'après son résultat, s'il y a deux

masses symétriques m', aux distances $-h'$ et $+h'$, le potentiel du disque au point P', dont deux des coordonnées sphériques sont ρ' et θ, aura pour expression

$$V' = -\frac{2m'}{\pi r' r'_1}\left[(r'+r'_1)\operatorname{arc\,tang}\frac{r'+r'_1}{2h'\nu} - (r'-r'_1)\operatorname{arc\,tang}\frac{r'-r'_1}{2h'\nu}\right],$$

r' et r'_1 étant les distances des deux masses m' au point P' considéré, et ν étant racine de l'équation

$$(40) \qquad \frac{\sin^2\theta}{1+\nu^2} + \frac{\cos^2\theta}{\nu^2} = \frac{a^2}{\rho'^2}$$

dans laquelle l'origine des coordonnées est au centre de l'ouverture circulaire; l'axe des z coïncide avec l'axe de ce cercle.

Prenons la figure inverse par rapport à l'origine, afin d'obtenir la portion de ψ afférente au plan évidé. En appelant ρ, h, r et r_1 ce que deviennent respectivement ρ', h', r' et r'_1, on a

$$\rho\rho' = a^2, \qquad hh' = a^2, \qquad \frac{r}{r'} = \frac{r_1}{r'_1} = \frac{\rho}{h'},$$

d'où l'on tire

$$r'+r'_1 = \frac{h'}{\rho}(r+r_1), \qquad r'-r'_1 = \frac{h'}{\rho}(r-r_1).$$

D'après le principe de Thomson, le potentiel du plan évidé est

$$V = \frac{aV'}{\rho}.$$

Si donc nous exprimons V' au moyen de r, r_1, ρ et si nous posons $m = \frac{am'}{h'}$, il viendra

$$V = \frac{-2m}{\pi r r_1}\left[(r+r_1)\operatorname{arc\,tang}\frac{r+r_1}{2\rho\nu} - (r-r_1)\operatorname{arc\,tang}\frac{r-r_1}{2\rho\nu}\right].$$

En ajoutant à ce potentiel celui des deux masses m, nous aurons l'expression cherchée de ψ,

$$(41) \qquad \psi = \frac{m}{r} + \frac{m}{r_1} - \frac{2m}{\pi r r_1}\left[(r+r_1)\operatorname{arc\,tang}\frac{r+r_1}{2\rho\nu} - (r-r_1)\operatorname{arc\,tang}\frac{r-r_1}{2\rho\nu}\right],$$

où ν est la racine positive (ou nulle) de l'équation

$$(40)' \qquad \frac{\sin^2\theta}{1+\nu^2} + \frac{\cos^2\theta}{\nu^2} = \frac{\rho^2}{a^2};$$

les longueurs ρ, r et r_1 sont les distances du point considéré au centre du disque, au centre d'explosion et au point symétrique du centre d'explosion par rapport à la surface libre.

Les expressions trouvées ci-dessus pour w, φ_3 et ψ permettent de prouver qu'autour des bords du disque il y a éclaboussement : j'entends par là que *la composante verticale de la vitesse du liquide est infinie sur les bords du disque.* Il s'agit d'évaluer la fonction

$$(42) \qquad w\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

sur le cercle représenté par les équations

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad z = 0.$$

Si l'on introduit la première de ces conditions dans la relation $(30)'$ qui détermine τ, on trouve

$$a^2\tau^4 - z^2\tau^2 - z^2 = 0.$$

La racine positive τ^2 de cette équation s'évanouit avec z, et l'on a, quand z est très petit,

$$\tau = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{a}} + \ldots, \qquad \tau'_z = \frac{1}{2\sqrt{az}} + \ldots.$$

Or l'expression de φ_3 donne

$$(43) \qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau} + \frac{z\tau'_z}{\tau^2(1+\tau^2)}\right].$$

Ayant égard aux valeurs précédentes de τ et de τ'_z, on voit que cette dérivée est infinie pour $z = 0$,

$$(44) \qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = -\frac{\sqrt{a}}{\pi\sqrt{z}} + \ldots.$$

Faisons maintenant $x^2 + y^2 = a^2$ dans l'équation (40), qui dé-

finit ν. Il vient

$$(a^2+z^2)\nu^4+(a^2+z^2)z^2\nu^2-a^2z^2=0.$$

Les deux racines de cette équation en ν^2 tendent vers zéro avec z; la positive a pour partie principale $z:a$, d'où il résulte, quand z est très petit,

$$\nu=\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{a}}+\ldots,\qquad \nu'_z=\frac{1}{2\sqrt{az}}+\ldots.$$

Pour calculer la dérivée de ψ par rapport à z, dans l'hypothèse $z=0$, on peut considérer ρ, r et r_1 comme des constantes, leurs dérivées par rapport à z s'évanouissant avec z; de la sorte on trouve simplement

$$(45)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{64m\rho^3\nu^2\nu'_z}{\pi[(r+r_1)^2+4\rho^2\nu^2][(r-r_1)^2+4\rho^2\nu^2]}.$$

On peut, d'après ce qui précède, négliger ν^2 dans le premier facteur du dénominateur, qui devient alors

$$\pi[(r^2-r_1^2)^2+4(r+r_1)^2\rho^2\nu^2],$$

ou, en vertu des expressions de r et r_1,

$$\pi[16h^2z^2+4(r+r_1)^2\rho^2\nu^2].$$

Sur les bords du disque on a

$$\rho=a,\qquad r=r_1=\sqrt{a^2+h^2},$$

de sorte que la dérivée considérée s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{4ma^3\nu'_z}{\pi[h^2z^2+a^2(a^2+h^2)\nu^2]},$$

ou, eu égard aux valeurs de ν et de ν'_z,

$$(46)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{2ma\sqrt{a}}{\pi\sqrt{z}\,[a(a^2+h^2)+h^2z]}.$$

Il suffit de rapprocher ce résultat des formules (35)' et (44) pour reconnaître que sur les bords du disque l'expression (42) est infinie comme $\frac{1}{\sqrt{z}}$, ce qui démontre le théorème.

Remarque. — A la question de l'explosion sous un disque flottant se rattache analytiquement la suivante : On laisse tomber un disque à plat sur la surface de l'eau avec la vitesse w; quelle est la percussion $\mu\Phi$ en un point quelconque du fluide?

Si l'on pose $\Phi = - w\varphi_3$, il est aisé de voir que φ_3 est identique à la fonction désignée du même nom dans les pages précédentes. La solution est donnée, pour le disque elliptique, par les formules (29) et (30), où l'on devra tenir compte de l'hypothèse $c = 0$ ainsi que de la relation (39) qui en découle. Pour le disque circulaire, la solution résulte des formules (29)' et (30)'. Nous venons de prouver que sur les bords du disque la dérivée de φ_3 par rapport à z est infinie, tandis qu'elle est, comme on sait, partout égale à w sur la face inférieure du disque. Ainsi, dans le cas présent, la vitesse du liquide est égale à w sous le disque et infinie sur ses bords. Ajoutons qu'on peut trouver l'équation des lignes de flux sous forme finie.

FRAGMENTS DIVERS.

PRINCIPE DES IMAGES

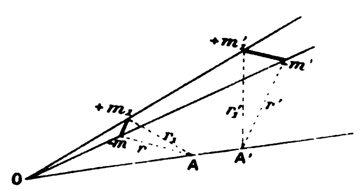
DANS

LES MILIEUX DIÉLECTRIQUES.

Considérons un milieu diélectrique et soient

$mm_1 = ds$ l'axe de polarisation en un point du milieu;
$m'm'_1 = ds'$ son transformé par rayons vecteurs réciproques par rapport à un centre d'inversion O;
k le rayon d'inversion;

Fig. 1.



ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 les distances respectives de $-m$, $-m'$, $+m_1$, $+m'_1$ au centre O;
a, r, r_1 les distances d'un point A du milieu au centre O, à $-m$ et à $+m_1$;
a', r' et r'_1 celles du point A', transformé de A, au centre O, à $-m'$ et à $+m'_1$.

Les quantités d'*électricité libre* sont

$$q = m_1 - m = \frac{dm}{ds}\,ds, \qquad q' = m'_1 - m' = \frac{dm'}{ds'}\,ds'.$$

Les quantités d'*électricité polarisée* sont

$$\mu = m\,ds, \qquad \mu' = m'\,ds'.$$

L'élément $m m_1$ fournit au point A' le potentiel

$$v = \frac{m_1}{r_1} - \frac{m}{r}.$$

L'élément $m' m'_1$ fournit au point A' le potentiel

$$v' = \frac{m'_1}{r'_1} - \frac{m'}{r'},$$

que l'on peut, en raison de relations géométriques évidentes, écrire

$$v' = \frac{m'_1 \rho_1}{a' r_1} - \frac{m' \rho}{a' r}.$$

Si donc on détermine m' et m'_1 par les relations

$$k m_1 = m'_1 \rho_1, \qquad k m = m' \rho,$$

il viendra

$$v' = \frac{kv}{a'}.$$

Évaluons μ' et q' en fonction de μ et de q. On a

$$m' = \frac{km}{\rho}, \qquad ds' = \frac{\rho'}{\rho}\,ds, \qquad \rho\rho' = k^2,$$

d'où, en multipliant les deux premières égalités membre à membre et tenant compte de la troisième, ainsi que de l'expression de μ, on tire

$$(1) \qquad \mu' = k\mu\frac{\rho'}{\rho^2} = \mu\frac{k^3}{\rho^3} = \mu\frac{\rho'^3}{k^3}.$$

D'autre part, si l'on différentie l'expression de m', on trouve

$$\frac{dm'}{ds'}\,ds' = \frac{k}{\rho}\,\frac{dm}{ds}\,ds - \frac{k}{\rho^2}\,\frac{d\rho}{ds}\,m\,ds.$$

Par l'introduction des expressions de q et de μ, ainsi que des

angles α et α' que font les segments $m_1 m$ et $m'_1 m'$ avec la droite Omm', cette relation devient

$$(2) \qquad q' = q\frac{k}{\rho} - \mu\frac{k}{\rho^2}\cos\alpha = q\frac{\rho'}{k} + \mu\frac{\rho'^2}{k^3}\cos\alpha'.$$

Si l'on désigne par δ la densité de l'électricité libre, par h le moment de polarisation, par $d\varpi$ l'élément de volume dont l'axe est h, par δ', h' et $d\varpi'$ les quantités correspondantes pour le milieu transformé, on a

$$\delta = \frac{q}{d\varpi}, \qquad h = \frac{\mu}{d\varpi}; \qquad \delta' = \frac{q'}{d\varpi'}, \qquad h' = \frac{\mu'}{d\varpi'};$$

$$d\varpi' = \frac{\rho'^3}{\rho^3}\,d\varpi = \frac{k^6}{\rho^6}\,d\varpi = \frac{\rho'^6}{k^6}\,d\varpi.$$

Les relations (1) et (2) deviennent alors

$$(3) \qquad h' = h\frac{k^3}{\rho'^3} = h\frac{\rho^3}{k^3},$$

$$(4) \qquad \delta' = \delta\frac{\rho^5}{k^5} - h\frac{\rho^4}{k^5}\cos\alpha = \delta\frac{k^5}{\rho'^5} + h\frac{k^3}{\rho'^4}\cos\alpha'.$$

Cela posé, étant donné un conducteur en équilibre de lui-même, au potentiel V, avec la densité superficielle e, dans un milieu diélectrique où l'*électricité libre* a pour densité δ et l'*électricité de polarisation* a pour moment h, si l'on place au pôle d'inversion une masse électrique $-Vk$, le conducteur obtenu par inversion se tiendra en équilibre sous l'influence de cette masse, au potentiel zéro, et les quantités h', δ' et e' seront données, les deux premières par les équations (3) et (4), la dernière par la formule

$$e' = e\frac{\rho^3}{k^3} = e\frac{k^3}{\rho'^3}.$$

Les nouveaux axes de polarisation seront les transformés, par rayons vecteurs réciproques, des anciens.

Exemple. — Une sphère C, au potentiel constant V, est plongée dans un milieu diélectrique, caractérisé par δ et h constants, et par des axes de polarisation tous centraux. Il est évident, par symétrie, que e est constant. La transformée est une sphère C',

plongée dans un milieu diélectrique, où tous les axes de polarisation sont dirigés tangentiellement à des cercles, qui passent tous au point O′, image du centre d'inversion O par rapport à cette sphère.

La sphère se tient en équilibre électrique au potentiel zéro, sous l'influence de la charge $-Vk$ concentrée en O; les valeurs de δ', h' et e' sont données par les formules précédentes.

Le problème est résolu aussi, lorsque h et δ ne varient qu'avec la distance au centre de la sphère C. La densité à la surface de la sphère C′ suit la même loi que si le milieu n'était pas électrisé.

THÉORIE

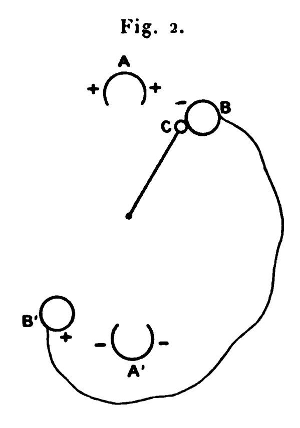
DU

« REPLENISHER » DE THOMSON.

1. *Schéma du replenisher.* — Un conducteur creux A (*fig.* 2), préalablement chargé d'une quantité d'électricité $+m_0$, induit de l'électricité négative sur le conducteur B et repousse le fluide positif sur le conducteur B', en communication lointaine avec B.

Un conducteur mobile C se charge de fluide négatif au contact de B, puis abandonne toute cette électricité à un conducteur creux A', qu'il touche à l'intérieur.

Fig. 2.



Le conducteur A' induit de l'électricité négative sur le conducteur B', en communication lointaine avec B. Une fois déchargé, C touche B', lui prend du fluide positif, qu'il reporte tout entier sur A, et ainsi de suite.

De la sorte, A et A' se chargent de quantités croissantes d'électricité, positive sur A, négative sur A'.

Le système (A, B) est identique au système (A', B').

2. Au bout de p tours, C est revenu en contact avec B. Soient alors les charges m_p sur A, μ_p sur B, q_p sur C, m'_p sur A', μ'_p sur B'.

Il y a d'abord une relation entre m_p, μ_p et q_p. En effet, la charge $\mu_p + q_p$ peut être regardée comme la somme de deux autres, l'une $-\eta m_p - \theta m_p$ (η et θ constantes positives, de somme moindre que l'unité) due à l'influence de m_p, si le conducteur $B + C$ était au potentiel *zéro*, l'autre $(\mu_p + \eta m_p) + (q_p + \theta m_p)$, qui serait d'*elle-même* en équilibre sur $B + C$. Or il y a évidemment proportionnalité entre la charge $q_p + \theta m_p$ de C et la charge $\mu_p + \eta m_p$ de B :

$$q_p + \theta m_p = \beta(\mu_p + \eta m_p) \qquad (\beta > 0),$$

d'où, en posant

$$\eta\beta - \theta = \alpha,$$

on tire

$$q_p = \alpha m_p + \beta \mu_p. \tag{1}$$

Exprimons maintenant que B et B', qui communiquent, sont au même potentiel. La charge sur $B + C$ peut être considérée comme la somme de deux autres, l'une $-(\eta + \theta) m_p$ qui, conjointement avec la charge m_p du corps A, maintiendrait B au potentiel zéro, l'autre $\mu_p + q_p + (\eta + \theta) m_p$, en équilibre d'elle-même. Si l'on appelle K la capacité du conducteur $B + C$, le potentiel de $B + C$ est, par définition,

$$\frac{\mu_p + q_p + (\eta + \theta) m_p}{K}.$$

De même, si l'on appelle k la capacité de B' et $-h m'_p$ (h étant une constante positive inférieure à l'unité) la charge qui y serait induite par A', si B' était en communication avec le sol, le potentiel de B' sera

$$\frac{\mu'_p + h m'_p}{k}.$$

En égalant ces deux potentiels, on a

$$\frac{\mu_p + q_p + (\eta + \theta) m_p}{K} = \frac{\mu'_p + h m'_p}{k}. \tag{2}$$

Enfin, en écrivant qu'aucune quantité d'électricité ne s'est créée ni détruite dans tout le système, on trouve

$$m_p + \mu_p + q_p + m'_p + \mu'_p = m_0. \tag{3}$$

En vertu de cette relation, la précédente pourra s'écrire

$$\frac{\mu_p + q_p + (\eta + \theta)\,m_p}{K} = \frac{m_0 - m_p - m'_p + (\eta + \theta)\,m_p + h\,m'_p}{K + k};$$

si l'on pose

$$\frac{K}{K + k} = \gamma \qquad \left(\frac{1}{2} < \gamma < 1\right),$$

on déduira de là

$$(4) \qquad \mu_p = -q_p + \gamma m_0 - [\gamma + (\eta + \theta)(1 - \gamma)]\,m_p - (1 - h)\gamma m'_p.$$

Substituant cette valeur de μ_p dans l'équation (1), on trouve

$$(5) \qquad (1 + \beta)\,q_p = \beta\gamma m_0 + [\alpha - \beta\gamma + \beta(\eta + \theta)]\,m_p - (1 - h)\,\beta\gamma m'_p.$$

3. Telle serait l'expression exacte de q_p, s'il n'y avait déperdition par l'air. Mais, si l'on appelle τ le temps très court d'une demi-révolution, la charge de A, qui était m'_p au moment où C venait de toucher A, a diminué de $\lambda\tau m'_p$ (λ désignant le coefficient de déperdition, compris entre 0 et 1) quand C est arrivé en A et est devenue $(1 - \lambda\tau)\,m'_p$. On a donc

$$(5)' \quad (1 + \beta)\,q_p = \beta\gamma m_0 + [\alpha - \beta\gamma + \beta(\eta + \theta)]\,m_p - (1 - h)\,(1 - \lambda\tau)\beta\gamma m'_p.$$

D'ailleurs, lorsque C revient en A', sa charge est devenue $q_p(1 - \lambda\tau)$ et la charge de A' est devenue $m'_p(1 - \lambda\tau)^2$. Lorsque C touche A' à son intérieur, la charge de A' devient donc

$$m'_{p+1} = (1 - \lambda\tau)^2\,m'_p + (1 - \lambda\tau)\,q_p.$$

Si l'on pose

$$m'_{p+1} - m'_p = D\,m'_p,$$

il vient

$$(6) \qquad D\,m'_p = [(1 - \lambda\tau)^2 - 1]\,m'_p + (1 - \lambda\tau)\,q_p,$$

ou bien, le carré de τ étant négligeable,

$$(7) \qquad D\,m'_p = -2\lambda\tau\,m'_p + (1 - \lambda\tau)\,q_p.$$

Si l'on substitue dans cette relation la valeur (5)' de q_p, on trouvera

$$(8) \qquad D\,m'_p = -a\,m_p - b\,m'_p + c\,m_0,$$

en posant

$$(9) \quad \begin{cases} -a = \dfrac{1-\lambda\tau}{1+\beta}[\beta\gamma(\eta+\theta) - \beta(\gamma+\theta) - \theta], \\ b = \dfrac{(1-h)(1-\lambda\tau)^2}{1+\beta}\beta\gamma + 2\lambda\tau & (b > 0), \\ c = \dfrac{1-\lambda\tau}{1+\beta}\beta\gamma & (c > 0). \end{cases}$$

De la formule (7), on déduira visiblement Dm_p en changeant m'_p en m_p et m_p en m'_{p+1}, qui n'est autre chose que $m'_p + Dm'_p$. On trouve ainsi

$$(10) \qquad Dm_p = -bm_p - a(m'_p + Dm'_p) + cm_0.$$

Les charges inconnues m_p et m'_p vérifient donc deux équations (8) et (10) *aux différences finies,* linéaires et à coefficients constants. On sait intégrer de telles équations.

4. Pour simplifier les calculs, nous supposerons le corps C très petit par rapport aux conducteurs B et B'. Alors β et θ sont très petits; comme τ a été supposé très petit, a, b, c définis par les relations (9) sont également très petits; par suite aussi les différences Dm'_p, Dm_p en vertu des équations (8) et (10) sont très petites; η est très voisin de h, K de k, et le rapport γ diffère très peu de $\frac{1}{2}$. En conséquence, les relations (9) deviennent

$$(9)' \quad \begin{cases} a = \beta\dfrac{1-h}{2} + \theta, \\ b = \beta\dfrac{1-h}{2} + 2\lambda\tau, \\ c = \dfrac{\beta}{2}, \end{cases}$$

et l'équation (10) se réduit à

$$(10)' \qquad Dm_p = -bm_p - am'_p + cm_0.$$

Les intégrales des équations (8) et (10)' sont de la forme suivante :

$$(12) \quad \begin{cases} m_p = A(1-a-b)^p + B(1+a-b)^p + \dfrac{c}{a+b}m_0, \\ m'_p = A(1-a-b)^p - B(1+a-b)^p + \dfrac{c}{a+b}m_0; \end{cases}$$

les constantes A et B se déterminent par la condition que, pour $p = 0$, les charges m_p et m'_p se réduisent respectivement à m_0 et à zéro, ce qui donne

$$A = \frac{m_0(a + b - 2c)}{2(a - b)}, \qquad B = \frac{m_0}{2}.$$

Des formules (12) on déduit immédiatement

$$m_p - m'_p = 2B(1 + a - b)^p,$$

ce qui montre que la différence des charges des deux récepteurs A et A' *croît en progression géométrique avec le nombre de tours,* conformément à la théorie classique.

Ceci suppose d'ailleurs que la différence $a - b$ soit positive, condition qui, en vertu des formules (9)', revient à

$$\theta - 2\lambda\tau > 0.$$

Comme θ est positif, cette inégalité est vérifiée d'elle-même quand le mouvement de rotation du transmetteur C est extrêmement rapide ($\tau = 0$).

EFFET

D'UN

OBUS AIMANTÉ SUR UN GALVANOMÈTRE.

1. L'obus, aimanté longitudinalement, peut sensiblement être assimilé à un barreau de longueur $2a$, portant à ses extrémités deux masses magnétiques $+m$ et $-m$.

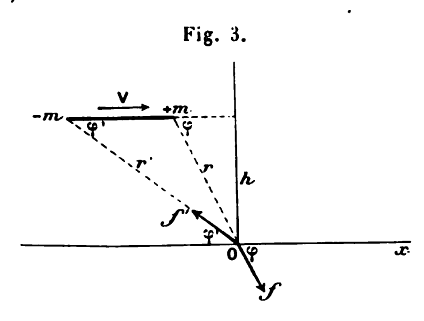
Il nous faut calculer la *force magnétique* exercée sur un pôle magnétique $+1$, supposé au centre O du galvanomètre, ou plutôt la composante X de cette force, parallèle à la vitesse V de l'obus.

Soient (*fig.* 3)

r, r' les distances de ses extrémités au centre O du galvanomètre;

x la distance de son milieu à la perpendiculaire abaissée de O sur la trajectoire;

Fig. 3.



φ, φ' les angles de la vitesse V avec les distances r et r'.

Les masses $+m$ et $-m$ exercent en O les forces $\frac{m}{r^2}$ et $-\frac{m}{r'^2}$.

On aura donc

$$(1) \qquad X = \frac{m\cos\varphi}{r^2} - \frac{m\cos\varphi'}{r'^2} = -m\left(\frac{x+a}{r^3} - \frac{x-a}{r'^3}\right).$$

Nous aurons besoin de la dérivée de X par rapport à t

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{dx}\frac{dx}{dt} = V\frac{dX}{dx}.$$

Or on a, en désignant par h la distance minima de l'obus au galvanomètre,

$$r^2 = (x+a)^2 + h^2, \qquad r'^2 = (x-a)^2 + h^2.$$

On déduit de là

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= -mV\left[\frac{r^2 - 3(x+a)^2}{r^5} - \frac{r'^2 - 3(x-a)^2}{r'^5}\right],\\ &= -mV\left[\frac{h^2 - 2(x+a)^2}{r^5} - \frac{h^2 - 2(x-a)^2}{r'^5}\right].\end{aligned}$$

Or la demi-longueur a de l'obus doit être petite par rapport à la distance h; nous devons donc supposer a^2 négligeable devant h^2. Dans cette hypothèse, on a

$$r^2 = x^2 + h^2 + 2ax, \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2+h^2}\,\frac{1}{1+\dfrac{2ax}{x^2+h^2}},$$

d'où résulte, *sensiblement*,

$$\frac{1}{r^5} = \frac{1}{(x^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\left(1 - \frac{5ax}{x^2+h^2}\right).$$

Par suite on obtient

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{mV}{(x^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\left[(h^2-2x^2-4ax)\left(1-\frac{5ax}{x^2+h^2}\right)-(h^2-2x^2+4ax)\left(1+\frac{5ax}{x^2+h^2}\right)\right],$$

ou bien, en remarquant que $2am$ est le *moment magnétique* M de l'obus,

$$(2) \qquad \frac{dX}{dt} = -3MV\frac{x(2x^2-3h^2)}{(x^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

Enfin, si l'on pose $x = h\xi$, il viendra

$$(2)' \qquad \frac{dX}{dt} = \frac{3MV}{h^4}\,\frac{3\xi-2\xi^3}{(1+\xi^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

2. En vue d'étudier les variations de cette dérivée, construisons la courbe (*fig.* 4) qui a pour abscisses les valeurs de ξ et pour ordonnées celles de la fonction

$$f(\xi) = \frac{3\xi - 2\xi^3}{(1+\xi^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

Si l'on égale à zéro la dérivée $f'(\xi)$, on arrive à l'équation bicarrée

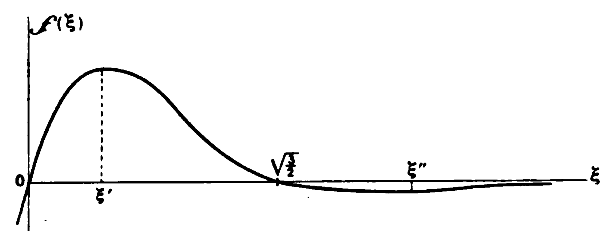
$$8\xi^4 - 24\xi^2 - 3 = 0,$$

dont les deux racines positives ont sensiblement pour valeurs

$$\xi' = \sqrt{\frac{1}{8}}, \qquad \xi'' = \sqrt{\frac{23}{8}}.$$

Le maximum $f(\xi')$ est sensiblement égal à $\frac{2}{3}$ et le minimum $f(\xi'')$ à $-\frac{1}{25}$, soit environ seize fois plus petit en valeur absolue que $f(\xi')$. Entre ce maximum et ce minimum, $f(\xi)$ s'annule pour

Fig. 4.



$\xi = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Par suite, la courbe $y = f(\xi)$ a la forme représentée dans la *fig.* 2, où l'on n'a tracé qu'une moitié de la courbe; l'autre moitié est symétrique de celle-là par rapport à l'origine des coordonnées.

Maintenant, prenons pour abscisses, au lieu des ξ, les temps

$$t = \frac{h\xi}{V},$$

comptés à partir de l'instant où l'obus passe juste au-dessus du cadre. Le quotient $\frac{V}{h}$ étant énorme, aux mêmes ordonnées corres-

pondront des abscisses bien moindres; et, comme le rapport $\frac{V}{h}$, est encore considérable, si le tir est suffisamment précis, les valeurs de $\frac{dX}{dt}$ fournies par la formule (2)′ seront représentées par les ordonnées d'une courbe analogue à la précédente, mais dont les sinuosités seront beaucoup plus resserrées dans le sens des abscisses, tout en ayant les mêmes ordonnées maxima et minima.

3. Si nous appelons σ la section embrassée par le contour du cadre du galvanomètre, R la résistance du fil et i l'intensité du courant qui y règne à l'instant t, la loi de l'induction donne

$$Ri = \sigma \frac{dX}{dt}$$

et la force F exercée sur un pôle magnétique $+1$, qui occuperait à peu près le centre du cadre, a pour expression

$$F = \frac{4\pi n i}{l} = \frac{4\pi n \sigma}{l R} \frac{dX}{dt}, \tag{3}$$

n désignant le nombre de tours du fil et l sa longueur totale. La force F est dirigée perpendiculairement au cadre.

Au moyen des formules (2) et (3) on pourrait, en appliquant les principes de la Dynamique, traiter rigoureusement le problème du mouvement de l'aiguille du galvanomètre sous l'action de l'obus. Mais on arriverait ainsi à une équation différentielle du second ordre et du second degré, qui n'est pas intégrable.

On peut substituer à la solution rigoureuse une solution approchée et tourner la difficulté de la manière suivante :

Remarquons que les fortes valeurs de $\frac{dX}{dt}$ sont toutes concentrées dans un très petit intervalle, de part et d'autre des abscisses $t = \pm \frac{h}{V\sqrt{8}}$. On peut donc remplacer ces forces progressivement variables par deux percussions de sens contraires, appliquées à l'aiguille du galvanomètre, l'une au temps $\frac{-h}{V\sqrt{8}}$, l'autre au temps $\frac{+h}{V\sqrt{8}}$, et, par conséquent, séparées par un intervalle $\frac{h}{V\sqrt{2}}$.

Toute la question est de savoir si, dans cet intervalle extraor-

dinairement court, l'aiguille peut être déviée par la première impulsion, d'un angle sensible, avant d'être ressaisie par la seconde, qui va l'arrêter sur place, ou à très peu près.

Commençons par évaluer la première percussion P. On se rend facilement compte qu'on peut prendre $t = -\infty$ pour limite inférieure de l'intégrale qui exprime P, au lieu du temps que l'obus emploie à son parcours entre la bouche à feu et le galvanomètre; on prendra donc

$$P = \int_{-\infty}^{0} F\,dt = \frac{4\pi n\sigma}{lR} \int_{-\infty}^{0} \frac{dX}{dt}\,dt.$$

Or, t étant égal à Vx, la formule (1) donne

$$X(-\infty) = 0, \qquad X(0) = \frac{-2ma}{h^3} = \frac{-M}{h^3}.$$

Par suite, la valeur absolue de P est

$$(4) \qquad |P| = \frac{4\pi n\sigma}{lR}[X(-\infty) - X(0)] = \frac{4\pi n\sigma}{lR}\frac{M}{h^3}.$$

4. Soient

m' et $-m'$ les charges magnétiques concentrées aux deux pôles de l'aiguille du galvanomètre;

λ la distance d'un point quelconque de l'aiguille au centre;

λ_1 la demi-longueur de l'aiguille;

$M' = 2\lambda_1 m'$ son moment magnétique;

ρ, ω et μ sa densité, sa section (supposées uniformes) et sa masse totale;

θ son angle d'écart.

Sur chaque pôle s'exerce, normalement à l'aiguille, la percussion $m'P$. Elle est égale, d'après un théorème de Dynamique, à la quantité de mouvement de la moitié de l'aiguille. Or un élément de masse de l'aiguille a pour expression $\omega\rho\,d\lambda$; sa quantité de mouvement sera

$$\omega\rho\lambda \frac{d\theta}{dt}\,d\lambda,$$

celle de la moitié de l'aiguille

$$\omega\rho \frac{d\theta}{dt} \int_0^{\lambda_1} \lambda\,d\lambda = \frac{1}{2}\omega\rho\lambda_1^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu\lambda_1}{4}\frac{d\theta}{dt}.$$

Si nous l'égalons à la valeur de $m' \mid P \mid$ fournie par l'équation (4), et si nous écrivons à la place de m' le moment magnétique M', divisé par $2\lambda_1$, il viendra

$$(5) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{8 M M' \pi n \sigma}{\mu \lambda_1^2 h^3 l R}.$$

Par suite, au bout du temps $\frac{h}{V\sqrt{2}}$, l'angle d'écart sera

$$\theta = \frac{4\sqrt{2} M M' \pi n \sigma}{\mu V \lambda_1^2 h^2 l R},$$

ou, si l'on remplace le moment magnétique M de l'obus par Av, A étant l'*intensité d'aimantation permanente de l'acier* et v le volume occupé par l'*acier* de l'obus,

$$(6) \qquad \theta = \frac{4\sqrt{2}}{V h^2} \cdot \frac{M' A v}{\mu \lambda_1^2} \cdot \frac{\pi n \sigma}{l R}.$$

Telle est la formule définitive qui donne l'angle d'écart observable, et où toutes les quantités doivent être évaluées en unités C.G.S. Elle montre qu'il faut, autant que possible, augmenter A, v, n, σ et diminuer h, μ, λ, l; mais il est malheureusement probable qu'on ne pourra pas pratiquement dépasser certaines limites, au delà desquelles θ commencerait à être sensible.

THÉORIE

D'UNE

EXPÉRIENCE DE HERTZ.

1. Nous commencerons par étudier la propagation de l'électricité dans un conducteur cylindrique (*voir* MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, n° 689). Soient

a le rayon de la section du conducteur;
r celui d'un cercle intérieur;
w l'intensité du courant sur tout le cercle de rayon r;
H le potentiel dû à l'induction;
E la force électromotrice extérieure;
ρ la résistance spécifique;
l la longueur du cylindre.

On a les deux équations

$$(1) \qquad \rho w = \frac{E}{l} - \frac{\partial H}{\partial t},$$

$$(2) \qquad -4\pi w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial t}\right);$$

H et w dépendent à la fois du rayon r et du temps t; mais E ne dépend que de t. Posons

$$(3) \qquad w = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

et cherchons à déterminer σ.

Différentiant l'équation (1) par rapport à r, on a

$$\rho\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial r},$$

d'où, en intégrant par rapport au temps,

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\rho\frac{\partial\sigma}{\partial r}. \tag{4}$$

Substituons dans la relation (2) les expressions (3) et (4); il viendra

$$\frac{4\pi}{\rho}\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right), \tag{5}$$

équation aux dérivées partielles que la fonction σ doit vérifier dans tout le conducteur. Pour achever de la déterminer, nous allons chercher la condition qu'elle doit remplir sur le contour du cylindre.

Or, si l'on appelle I l'intensité totale du courant, on a, à la surface,

$$H_a = AI, \tag{6}$$

A étant une constante. Mais

$$I = 2\pi\int_0^a w\,r\,dr = 2\pi\int_0^a \frac{\partial\sigma}{\partial t}\,r\,dr,$$

ce qui, en vertu de l'équation (5), peut s'écrire

$$I = \frac{\rho}{2}\int_0^a \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)dr = \frac{\rho}{2}\left[r\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right]_0^a,$$

ou finalement

$$I = \frac{\rho a}{2}\frac{\partial\sigma_a}{\partial r}. \tag{7}$$

D'autre part, en différentiant l'équation (6), on trouve

$$\frac{\partial H_a}{\partial t} = A\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{A\rho a}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\sigma_a}{\partial r}.$$

Or l'équation (1) donne, pour tous les points de la surface,

$$\rho\frac{\partial\sigma_a}{\partial t} = \frac{E}{l} - \frac{\partial H_a}{\partial t}.$$

Rapprochant ces deux derniers résultats, on obtient l'équation

que la fonction σ vérifie à la surface, savoir

$$\rho \frac{\partial \sigma_a}{\partial t} = \frac{E}{l} - \frac{A \rho a}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \sigma_a}{\partial r},$$

ou, en introduisant le coefficient de *self-induction* $L = A l$,

$$\rho l \frac{\partial \sigma_a}{\partial t} = E - L \frac{\rho a}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \sigma_a}{\partial r}. \tag{8}$$

On voit que la fonction σ est complètement déterminée par les deux équations (5) et (8). Une fois σ connue, les intensités w et I sont déterminées par les relations (3) et (7).

L'équation (8) donne la formule ordinaire de l'induction lorsqu'on suppose le courant w uniforme dans toute la section; car alors on a

$$\frac{\partial \sigma_a}{\partial t} = w = \frac{I}{\pi a^2},$$

et, comme la résistance totale R du fil a pour expression $\frac{\rho l}{\pi a^2}$, l'équation (8) devient

$$RI = E - L \frac{dI}{dt}. \tag{8'}$$

2. Dans l'expérience de Hertz, deux conducteurs cylindriques, de rayon a, de longueur l, sont placés dans le prolongement l'un de l'autre. Leurs extrémités en regard sont reliées chacune à l'une des extrémités du fil induit d'une bobine de Ruhmkorff. Les extrémités opposées portent chacune une sphère de capacité C.

On a, par suite, en appelant q la charge d'un des deux conducteurs,

$$E = \frac{2q}{C}, \qquad I = -\frac{dq}{dt},$$

d'où résulte, en vertu de l'équation (7),

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\rho a}{2} \frac{\partial \sigma_a}{\partial r}, \qquad \frac{dE}{dt} = -\frac{\rho a}{C} \frac{\partial \sigma_a}{\partial r}.$$

Si maintenant on différentie l'équation (8) par rapport à t, en tenant compte de ces valeurs, il vient

$$l \frac{\partial^2 \sigma_a}{\partial t^2} + \frac{a}{C} \frac{\partial \sigma_a}{\partial r} + \frac{a L}{2} \frac{\partial^3 \sigma_a}{\partial t^2 \partial r} = 0. \tag{9}$$

Il est aisé de trouver une fonction σ satisfaisant aux équations (5) et (9) quand on suppose a, et par suite aussi r, extrêmement petit. Posons à cet effet

$$\sigma = e^{-\mu t}\Sigma(r).$$

L'équation (5) devient alors

$$\frac{d^2\Sigma}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Sigma}{dr} + \frac{4\pi\mu}{\rho}\Sigma = 0. \tag{10}$$

Développons Σ en série et bornons-nous aux deux premiers termes

$$\Sigma = a_0 + a_2 r^2.$$

En substituant cette expression dans l'équation (10), on trouve

$$a_2 = -\frac{\pi\mu}{\rho}a_0.$$

On peut donc prendre

$$\sigma = a_0 e^{-\mu t}\left(1 - \frac{\pi\mu r^2}{\rho}\right).$$

Cette valeur de σ, portée dans l'équation (9), donne

$$-l\mu^2\left(1 - \frac{\pi\mu a^2}{\rho}\right) + \frac{2\pi\mu a^2}{C\rho} + \frac{\pi\mu^3 a^2 L}{\rho} = 0.$$

Si l'on introduit la résistance des cylindres

$$R = \frac{\rho l}{\pi a^2},$$

cette dernière relation devient

$$(L + l)\mu^2 - R\mu + \frac{2}{C} = 0. \tag{11}$$

La théorie ordinaire aurait donné

$$\mathfrak{L}\mu^2 - R\mu + \frac{2}{C} = 0, \tag{12}$$

$\mathfrak{L}$ désignant le coefficient de self-induction. On a donc

$$\mathfrak{L} = L + l. \tag{13}$$

....

3. Dans le cas général, on peut toujours poser comme plus haut

$$\sigma = e^{-\mu t}\Sigma(r),$$

ce qui transforme l'équation (5) en l'équation déjà obtenue

$$\frac{d^2\Sigma}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Sigma}{dr} + \frac{4\pi\mu}{\rho}\Sigma = 0. \tag{10}$$

La fonction Σ qui satisfait à cette équation et qui reste finie pour $r = 0$ est nécessairement de la forme

$$\Sigma = \gamma J_0\left(r\sqrt{\frac{4\pi\mu}{\rho}}\right),$$

γ désignant une constante arbitraire et J_0 la fonction de Bessel, de sorte que l'on a une solution de l'équation (5) en prenant

$$\sigma = \gamma e^{-\mu t} J_0\left(r\sqrt{\frac{4\pi\mu}{\rho}}\right). \tag{16}$$

Si l'on substitue cette expression de σ dans la condition (9), on trouve

$$l\mu^2 J_0\left(a\sqrt{\frac{4\pi\mu}{\rho}}\right) + \left(\frac{1}{C} + \frac{L\mu^2}{2}\right) a\sqrt{\frac{4\pi\mu}{\rho}}\, J_0'\left(a\sqrt{\frac{4\pi\mu}{\rho}}\right) = 0. \tag{17}$$

Posons maintenant

$$z = \sqrt{\frac{4\pi a^2\mu}{\rho}} = 2\sqrt{\frac{l\mu}{R}}; \tag{18}$$

l'élimination de μ entre ces deux dernières relations donne

$$C l z^3 \frac{J_0(z)}{J_0'(z)} + \frac{LC}{2} z^4 + \frac{16 l^2}{R^2} = 0. \tag{19}$$

Appelons R' la résistance du fil; la résistance vraie R sera plus grande que R' à cause de l'étincelle; représentons-la par $nR'(n > 1)$. L'équation précédente deviendra

$$C l z^3 \frac{J_0(z)}{J_0'(z)} + \frac{LC}{2} z^4 + \frac{16 l^2}{n^2 R'^2} = 0. \tag{20}$$

Passons aux nombres. Dans l'expérience de Hertz (*Annales de*

Wiedemann, t. XXXI, 1887) les sphères avaient 15^{cm} de rayon; par conséquent

$$C = \frac{15}{3^2 . 10^{20}}.$$

Chacun des fils du condensateur avait 150^{cm} de longueur ($l = 150$) et un demi-centimètre de diamètre ($d = 0{,}5$). Or le coefficient de self-induction L est représenté par la formule de Helmholtz

$$L = 2l\left(\log\frac{4l}{d} - 0{,}75 + \frac{1-k}{2}\right),$$

où $k = 1$ dans la théorie de Neumann et $k = 0$ dans celle de Maxwell. Avec $k = 1$ on trouve

$$L = 1902^{cm};$$

par suite, l'hypothèse $k = 0$ donne

$$L = 1902 + l = 2052^{cm},$$

nombre que nous adopterons.

Quant à la résistance d'un fil de cuivre de $0^{cm},5$ de diamètre elle est, pour une longueur de 1^m, égale à $0^{ohm},0008$; donc on aura, en unités C.G.S,

$$R' = 8.10^5.1{,}5 = 12.10^5.$$

A raison de ces valeurs de l, C et R′ l'équation (20) devient

$$z^3\frac{J_0(z)}{J'_0(z)} + 6{,}84 z^4 + \frac{10^{11}}{n^2} = 0. \tag{21}$$

On peut, en considérant comme connue la résistance de l'étincelle, c'est-à-dire n, calculer la partie imaginaire de z^2. En effet, nous avons

$$\sigma = \gamma e^{-\mu t}\Sigma(r), \qquad z^2 = \frac{4l\mu}{nR'}.$$

Si donc on fait

$$\mu = \mu' + i\mu'',$$

il faut, pour que la vibration s'éteigne, que μ' soit positif; quant à μ'', en appelant τ le temps d'une vibration complète, on a, si

la théorie de Maxwell est vraie,

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1,77}{10^8};$$

et, comme on a, d'autre part,

$$\mu'' = \frac{2\pi}{\tau},$$

on trouve immédiatement

$$\mu'' = \frac{3,1416}{1,77} 10^8 = 1,775.10^8.$$

Par suite

$$z^2 = \frac{4l}{nR'}(\mu' + i\mu'') = \frac{\mu' + i\mu''}{2000n} = \frac{\mu'}{2000n} + \frac{i}{n} 88700,$$

ce qui fait connaître la partie imaginaire de z^2.

Comme le coefficient d'extinction $e^{-\mu' t}$ doit décroître très rapidement quand t augmente, il faut que μ' soit très grand. Nous sommes donc conduits à calculer la valeur de $J'_0(z) : J_0(z)$ pour les valeurs de z qui ont un très grand module. Pour de telles valeurs on a (JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. III),

$$J_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left[e^{i\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - k\pi i} + e^{-i\left(z - \frac{\pi}{4}\right)} \right],$$

avec $k = 0$ ou $k = 1$, suivant que la partie réelle de z est positive ou négative. En prenant la dérivée logarithmique des deux membres et négligeant l'inverse de z, on trouve

$$\frac{J'_0(z)}{J_0(z)} = i \frac{e^{i\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - k\pi i} - e^{-i\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - k\pi i} + e^{-i\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}}.$$

Or $e^{-k\pi i}$ est égal à $+1$ si $k = 0$, à -1 si $k = 1$; soient Z_0 et Z_1 les valeurs de $J'_0(z) : J_0(z)$ qui correspondent à ces deux hypothèses. On a visiblement $Z_0 Z_1 = -1$; il suffit donc de calculer Z_0. Posons

$$z = \alpha + i\beta, \qquad \alpha - \frac{\pi}{4} = \alpha,$$

nous aurons

$$Z_0 = i \frac{e^{-\beta + i\alpha'} - e^{\beta - i\alpha'}}{e^{-\beta + i\alpha'} + e^{\beta - i\alpha'}},$$

ou, en introduisant les sinus et cosinus hyperboliques,

$$Z_0 = \frac{-\sin 2\alpha' - i\,\mathrm{Sh}\,2\beta}{\cos 2\alpha' + \mathrm{Ch}\,2\beta},$$

ou enfin

$$Z_0 = \frac{\cos 2\alpha - i\,\mathrm{Sh}\,2\beta}{\sin 2\alpha + \mathrm{Ch}\,2\beta}.$$

. . . .

Ce morceau étant inachevé et présentant une lacune, il peut être bon de rappeler que, une fois z, et par suite μ, tiré de l'équation (21), la solution *physique* du problème sera donnée, non pas par la formule (16), où γ est comme μ une constante imaginaire, mais par

$$\sigma = \text{partie réelle de } \gamma e^{-\mu t} J_0\left(r\sqrt{\frac{4\pi\mu}{\rho}}\right).$$

C'est cette fonction qu'on devra employer pour calculer q au moyen de la relation

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\rho a}{2}\frac{\partial\sigma_a}{\partial r}.$$

On trouvera ainsi pour la charge q une loi de variation dont la forme analytique sera la même que dans la théorie de Sir W. Thomson.

FIN.

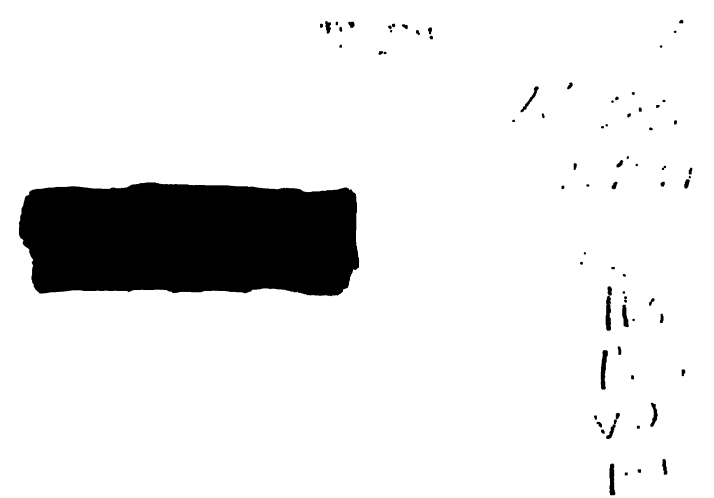
TABLE DES MATIÈRES.

HYDRODYNAMIQUE.

FRAGMENTS DIVERS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

26127 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.



43861. — Paris. Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

